摛藻堂四庫全書薈要

子部

欽定四庫全書薈要

子部

御製數理精蘊下編卷三十九

詳校官主事臣陳木

欽定四庫全書薈要卷一萬八百六十二 子部

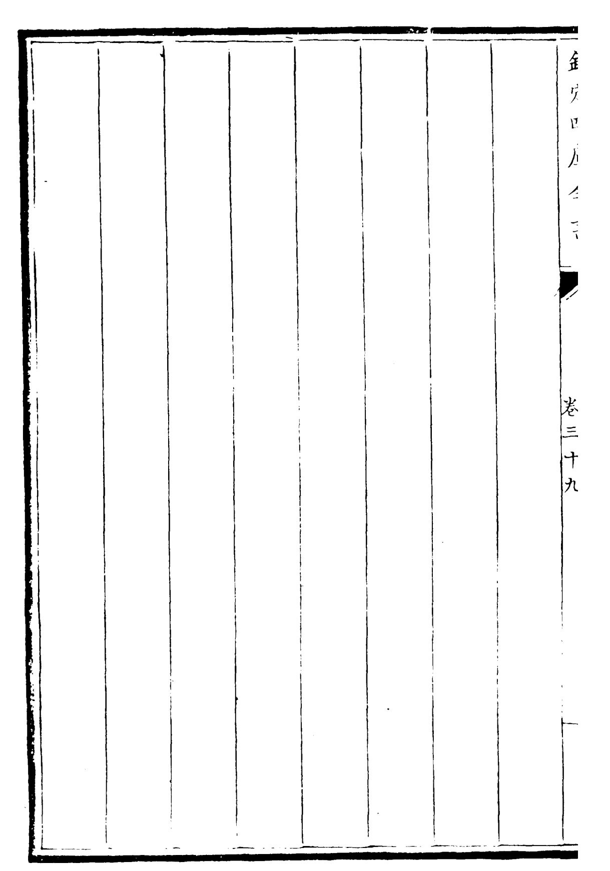
御製數理精蘊下編卷三十九

末部九

比例規解

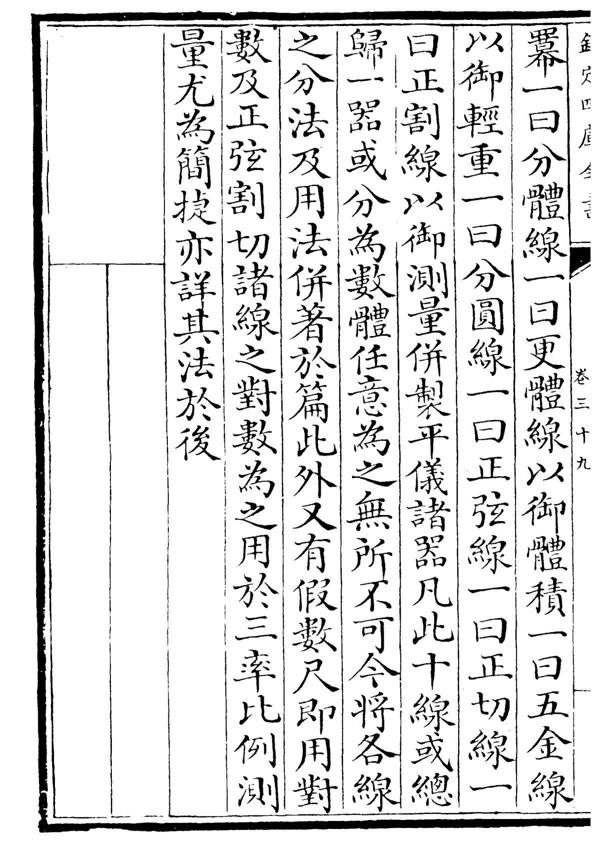
平分線　分面線　更面線

分體線　更體線　五金線



比例規解

比例尺代算凡點線面體乘除開方皆可以規度而得然於畫圖製器尤所必需誠算器之至善者焉究其立法之原總不越乎同式三角形之比例蓋同式三角形其各角各邊皆為相當之率今張尺之兩股為三角形之兩腰其尺末相距即三角形之底遂成兩邊相等之三角形於中任截兩邊相等之各三角形則其各腰之比例必與各底之比例相當也一曰平分線以御三率一曰分面線一曰更面線以御面



冪一曰分體線一曰更體線以御體積一曰五金線以御輕重一曰分圓線一曰正弦線一曰正切線一曰正割線以御測量併製平儀諸器凡此十線或總歸一器或分為數體任意為之無所不可令將各線之分法及用法併著於篇此外又有假數尺即用對數及正弦割切諸線之對數為之用於三率比例測量尤為簡捷亦詳其法於後

平分線

自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線依幾何原本十二卷十九節之法將甲乙甲丙二線俱平分為二百分即為平分線也尺之長短任意為之尺短則平分一百分尺長則平分四五百分或一千分亦可分愈多而用愈便也

設如一丁戊線欲加五倍問得幾何

法以比例尺平分線第十分之己庚二

點依丁戊線度展開勿令移動次取平分線第五十分之辛壬二點相離之度作丁癸線即丁戊線之五倍也蓋十分之點為己與庚丙甲己庚為兩邊相等之三角形甲己甲庚為腰己庚相距為底又五十分之點為辛與壬丙甲辛壬為兩邊相等之三角形甲辛甲壬為腰辛壬相距為底此兩三角形為同式形故甲庚與己庚之比同於甲壬與辛壬

戊ㅁ丁

卯寅

乙 子 己 甲 庚 丑 丙

之比而甲庚與甲壬之比亦同於己庚與辛壬之比甲壬既為甲庚之五倍則辛壬必為己庚之五倍而丁癸亦為丁戊之五倍可知矣若欲将丁戊線加十五倍則仍以丁戊線度於十分上定尺取平分線第一百五十分之子丑二點相離之度作寅卯線即為丁戊線之十五倍也若欲将丁戊線加三分之二則将平分線第三十分之辰己二點依丁

戊線度展開勿令移動而取平分線第五十分之午未二點相離之度作申酉線即為丁戊線加三分之二也以丁戊線為三分而加二分共得五分因三與五之點近樞難用故用三十與五十其比例同也若有丁癸丁戊二線欲定其比例之分數則將平分線第一百分之戌亥二點依丁癸線度展開勿令移動次取丁戊線度尋至平分線第二十分之乾坎二點其相離之度恰符即定為一百分

之二十約為五分之一即丁癸丁戊兩線之比例也要之用尺之法不外於三率求四率如以一率為腰二率為底而定尺則三率復為腰而其底即四率也以一率為腰三率為底而定尺則二率復為腰而其底亦即四率也若以一率為底二率為腰而定尺則三率復為底而其腰則四率也諸線之用雖各不同其比例之理則一也

設如一丁戊線欲分為六分問每分幾何

法以比例尺平分線第六十分之己庚二點依丁戊線度展開勿令移動次取平分線第十分之辛壬二點相離之度截丁戊線於癸則丁癸即丁戊線六分之一也蓋六十分之點為己與庚而甲己庚為兩邊相等之三角形甲己甲庚為腰己庚相距為底又十分之點為辛與壬而甲辛壬亦為兩邊相等之三角

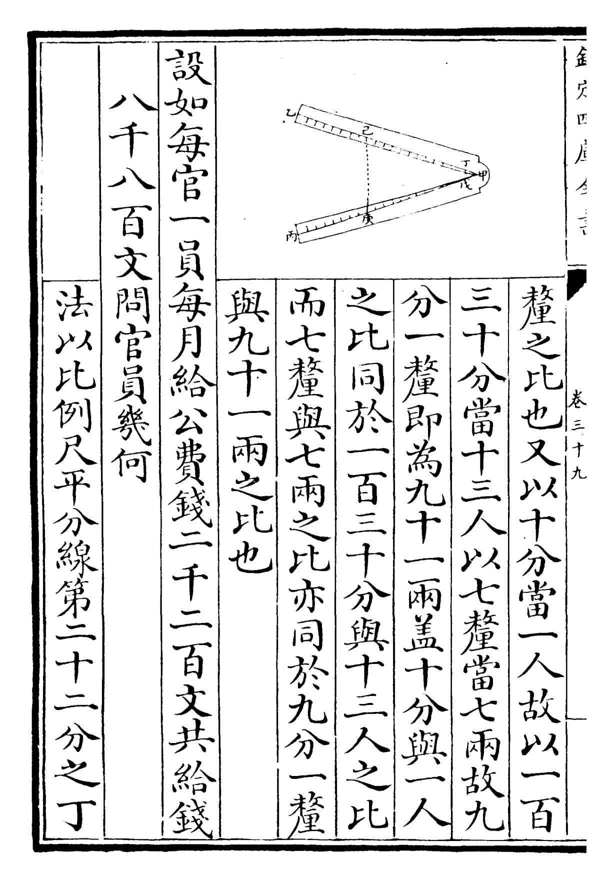
形甲辛甲壬為腰辛壬相距為底此兩三角形為同式形則甲庚與甲壬之比同於己庚與辛壬之比甲壬既為甲庚六分之一則辛壬必為己庚六分之一而丁癸亦為丁戊線六分之一可知矣若欲分丁戊線為七分則將平分線第七十分之子丑二點依丁戊線度展開勿令移動次取平分線第十分之辛壬二點相離之度截丁戊線於寅則丁寅

即丁戊線七分之一也又若丁戊線欲取七分之三則仍以丁戊線度於七十分上定尺兩取平分線第三十分之卯辰二點相離之度截丁戊線於己則丁己即丁戊線七分之三也

設如有十三人每人給銀七兩問共銀幾何

法以比例尺平分線第十分之丁戊二點依分釐尺七釐之度展開勿令移動次取平分線第一百三十分之己庚二

點相離之度於分釐尺上量之得九分一釐即得共銀為九十一兩也蓋十分之點為丁與戊而甲丁戊為兩邊相等之三角形甲丁甲戊為腰丁戊相距為底又一百三十分之點為己與庚而甲己庚亦為兩邊相等之三角形甲己甲庚為腰己庚相距為底此兩三角形為同式形故甲戊十分與甲庚一百三十分之比同於丁戊七釐與己庚九分一



釐之比也又以十分當一人故以一百三十分當十三人以七釐當七兩故九分一釐即為九十一兩蓋十分與一人之比同於一百三十分與十三人之比而七釐與七兩之比亦同於九分一釐與九十一兩之比也

設如每官一員每月給公費錢二千二百文共給錢八千八百文問官員幾何

法以比例尺平分線第二十二分之丁

戊二點依分釐尺一分之度展開勿令移動次取平分線第八十八分之己庚二點相離之度於分釐尺上量之得四分即得官四員也盖二十二分之點為丁與戊丙甲丁戊為兩邊相等之三角形甲丁甲戊為腰丁戊相距為底又八十八分之點為己與庚丙甲己庚為兩邊相等之三角形甲己甲庚為腰己庚相距為底此兩三角形為同式形故甲

戊二十二分與甲庚八十八分之比同於丁戊一分與己庚四分之比也又以二十二分當錢二千二百故以八十八分當錢八千八百以一分當官一員故四分即為官四員蓋二十二分與二千二百之比同於八十八分與八千八百之比而一分與一員之比亦同於四分與四員之比也

設如原有粟五斗易布二疋今有粟三石問易布幾

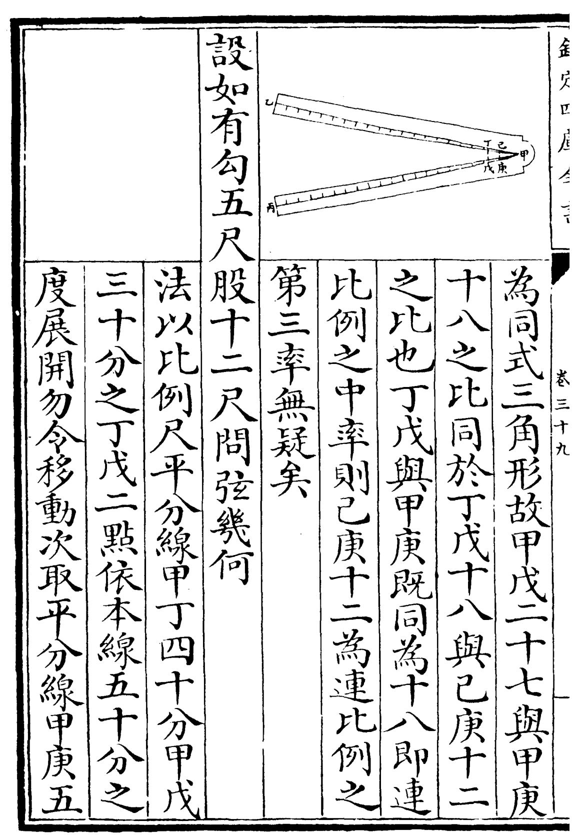
何

法以比例尺平分線第二十分之丁戊二點（四倍五斗之數因五分近極難用故用四倍之數也）依分釐尺二分之度展開勿令移動次取平分線第一百二十分之己庚二點相離之度（四倍三石之數三石為三十斗故四倍之得一百二十也）於分釐尺上量之得一寸二分即得布十二疋也蓋二十分之點為丁與戊一百二十分之點為己與庚丙甲丁戊與甲己庚

為同式兩三角形故甲戊二十分與甲庚一百二十分之比同於丁戊二分與己庚一寸二分之比也又以二十分當五斗為四倍之數故以一百二十分當三石亦為四倍之數以二分當二疋故一寸二分即為十二疋蓋二十分與五斗之比同於一百二十分與三石之比而二分與二疋之比亦同於一寸二分與十二疋之比也

設如有二十七及十八之兩數問相連比例之第三數幾何

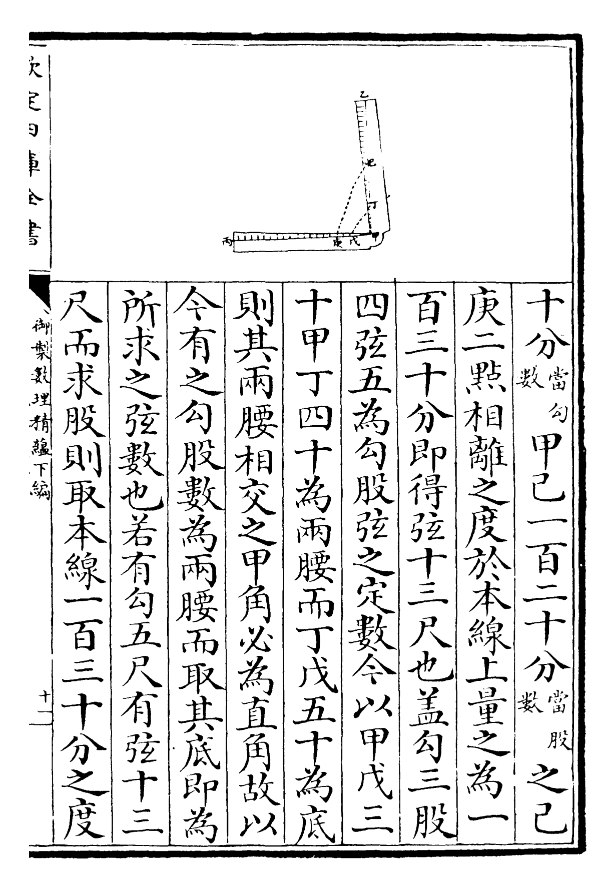
法以比例尺平分線第二十七分之丁戊二點依分釐尺一分八釐之度展開勿令移動次取平分線第十八分之己庚二點相離之度於分釐尺上量之得一分二釐即相連比例之第三數為十二也蓋二十七分之點為丁與戊十八分之點為己與庚而甲丁戊與甲己庚



為同式三角形故甲戊二十七與甲庚十八之比同於丁戊十八與己庚十二之比也丁戊與甲庚既同為十八即連比例之中率則己庚十二為連比例之第三率無疑矣

設如有勾五尺股十二尺問弦幾何

法以比例尺平分線甲丁四十分甲戊三十分之丁戊二點依本線五十分之度展開勿令移動次取平分線甲庚五



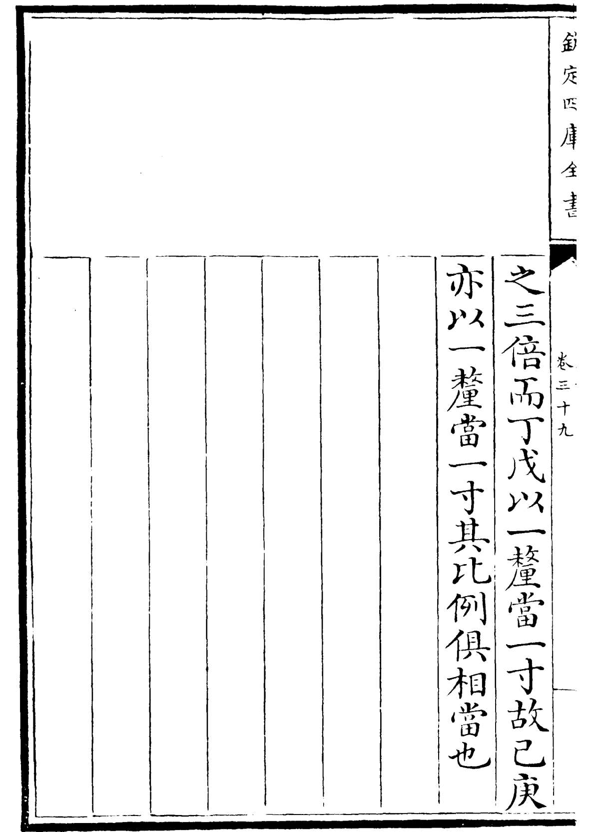
十分（當勾數）甲己一百二十分（當股數）之己庚二點相離之度於本線上量之為一百三十分即得弦十三尺也蓋勾三股四弦五為勾股弦之定數今以甲戊三十甲丁四十為兩腰而丁戊五十為底則其兩腰相交之甲角必為直角故以今有之勾股數為兩腰而取其底即為所求之弦數也若有勾五尺有弦十三尺而求股則取本線一百三十分之度

自五十分之庚點尋至一百二十分之己點其相離之度恰符即得股十二尺矣

設如有圓徑三十五寸問圓周幾何

法以比例尺平分線第二十一分之丁戊二點（徑率七之三倍也因七分近極故用三倍之數）依分釐尺三分五釐之度展開勿令移動次取平分線第六十六分之己庚二點相離之度（周率二十二之三倍也因徑率用三倍故周率亦三倍之）於分

釐尺上量之得一寸一分即一百一十寸為所求之圓周也葢二十一分之點為丁與戊六十六分之點為己與庚而甲丁戊與甲己庚為同式三角形故甲戊二十一與丁戊三分五釐之比同於甲庚六十六與己庚一寸一分之比而甲戊與甲庚既為徑與周之比例則丁戊與己庚亦必為徑與周之比例矣又甲戊為徑率之三倍故甲庚亦用周率



之三倍而丁戊以一釐當一寸故己庚亦以一釐當一寸其比例俱相當也

分面線

自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線依幾何原本十二卷二十一節之法分之即為分面線也或設正方面界一百釐其積數一萬釐以二因之得二萬釐開平方得一百四十一釐為積二萬釐之根又以三因之得三萬釐開平方得一百七十三釐為積三萬釐之根照此屢倍積數開平方將所得之數

於分釐尺上取其度按度截比例尺之甲乙甲丙二線即成分面線也

設如有甲乙丙三正方形甲形每邊一寸其積數之比例甲為一分乙為六分丙為九分今欲作一大正方形與甲乙丙三正方形之積等問其邊幾何

法以比例尺分面線第一分之兩點（因甲方之積為一分故用一分也）依甲正方形每邊一寸之度展開勿令移動乃併三正方面積共十六分即取分面線第十六分兩點

相距之度於分釐尺上量之得四寸即所求大正方形之每一邊用其度作正方形其積與甲乙丙三正方形之共積等也蓋十六分所作正方形原比一分所作正方形大十六倍則十六分相距之度所作正方形亦必比一分相距之度所作正方形大十六倍矣一分相距之度即甲正方形之一邊其積為一分則以十六分相距之度所作正方形其

積必為十六分與三正方形之共積相等也

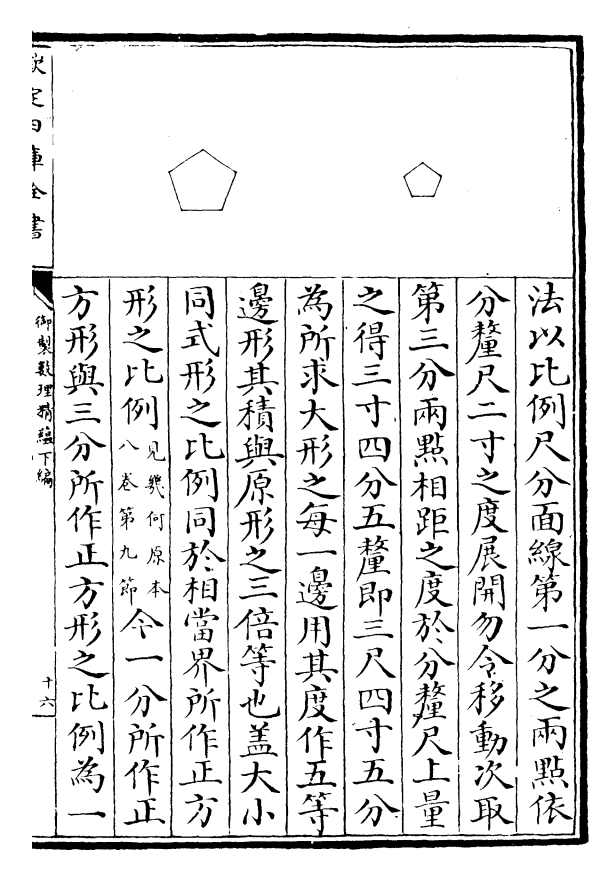
設如有大小等邊三角形小形每邊一寸大形每邊四寸今欲將兩面積相減取其餘積作同式等邊三角形問其邊幾何

法以比例尺分面線第一分之兩點依小形每邊一寸之度展開勿令移動次以大形每邊四寸之度於分面線上尋至第十六分之兩點其相距之度恰合

即大形與小形之比例為十六與一相減餘十五為較積即取分面線第十五分兩點相距之度於分釐尺上量之得三寸八分七釐即較形之每一邊也蓋大小同式多邊形之比例同於相當界所作正方形之比例（見幾何原本八卷第九節）令十六分所作正方形與一方所作正方形之比例為十六與一則十六分相距之度所作正方形與一分相距之度所作

正方形之比例亦為十六與一矣夫大小兩距度即大小兩三角形之相當界其所作兩正方形之比例既為十六與一則大小兩三角形之比例亦必為十六與一矣既得兩形之比例乃相減以得較既得較積之比例復用積以求邊即得所求之邊數也

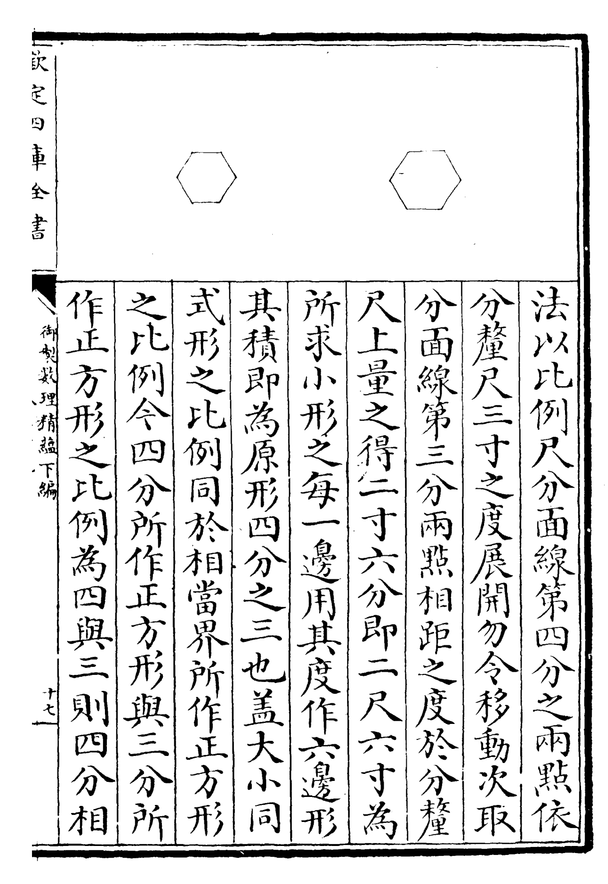
設如有五等邊形每邊二尺欲三倍其積作同式五等邊形問其每邊幾何



法以比例尺分面線第一分之兩點依分釐尺二寸之度展開勿令移動次取第三分兩點相距之度於分釐尺上量之得三寸四分五釐即三尺四寸五分為所求大形之每一邊用其度作五等邊形其積與原形之三倍等也葢大小同式形之比例同於相當界所作正方形之比例見幾何原本八卷第九節令一分所作正方形與三分所作正方形之比例為一

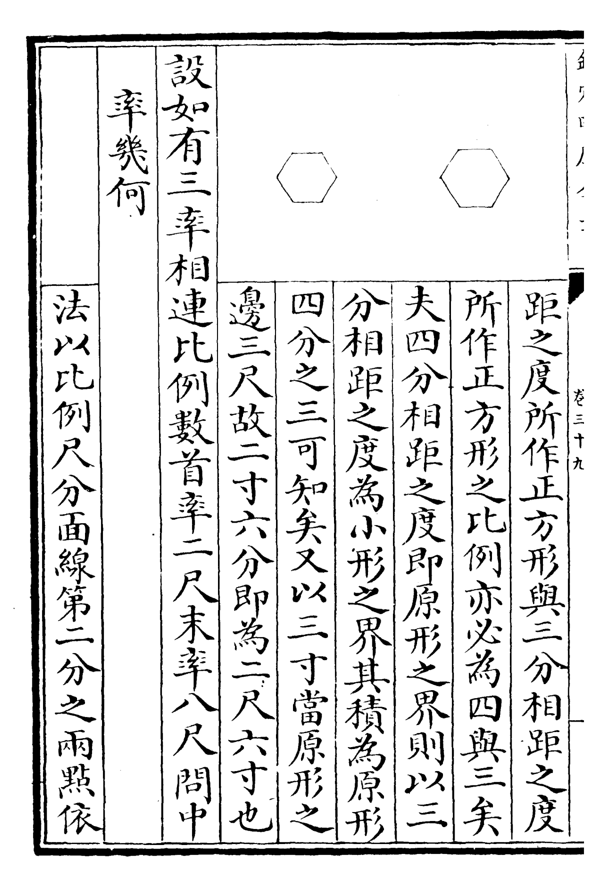
與三則一分相距之度所作正方形與三分相距之度所作正方形之比例亦必為一與三矣夫一分相距之度即原形之界則以三分相距之度為大形之界其積為原形之三倍可知矣又以二寸當原形之邊二尺故三寸四分五釐即為三尺四寸五分也

設如有六等邊形每邊三尺欲取其積四分之三作同式六等邊形問其每邊幾何



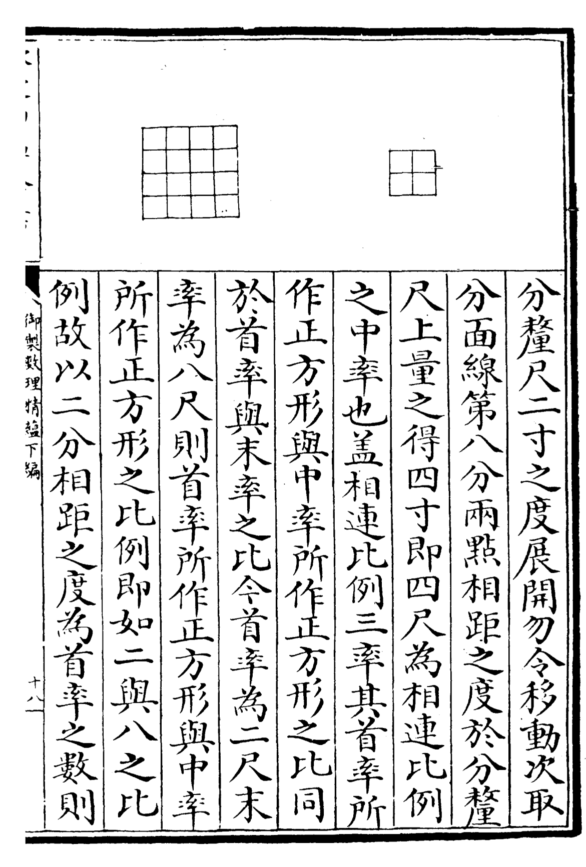
法以比例尺分面線第四分之兩點依分釐尺三寸之度展開勿令移動次取分面線第三分兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸六分即二尺六寸為所求小形之每一邊用其度作六邊形其積即為原形四分之三也蓋大小同式形之比例同於相當界所作正方形之比例令四分所作正方形與三分所作正方形之比例為四與三則四分相

距之度所作正方形與三分相距之度所作正方形之比例亦必為四與三矣夫四分相距之度即原形之界則以三分相距之度為小形之界其積為原形四分之三可知矣又以三寸當原形之邊三尺故二寸六分即為二尺六寸也



設如有三率相連比例數首率二尺末率八尺問中率幾何

法以比例尺分面線第二分之兩點依



分釐尺二寸之度展開勿令移動次取分面線第八分兩點相距之度於分釐尺上量之得四寸即四尺為相連比例之中率也蓋相連比例三率其首率所作正方形與中率所作正方形之比同於首率與末率之比令首率為二尺末率為八尺則首率所作正方形與中率所作正方形之比例即如二與八之比例故以二分相距之度為首率之數則

八分相距之度必為中率之數可知矣又首率用二寸當二尺故中率四寸即為四尺也

設如有正方面積一千六百尺問每一邊幾何

法以比例尺分面線第一分之兩點依分釐尺一寸之度展開勿令移動乃以一寸之十分作十尺自乘得一百尺與積數一千六百尺相較其比例如一與十六即取分面線第十六分兩點相距

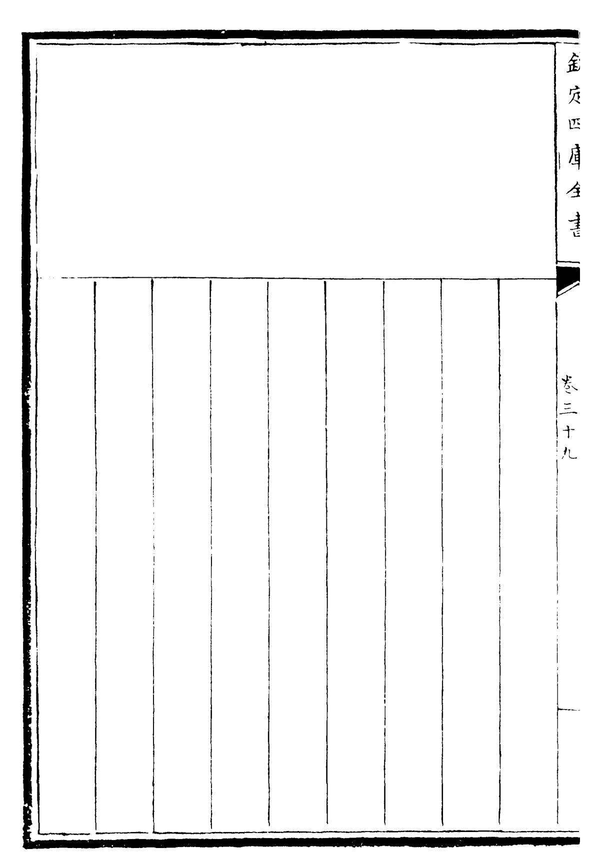
之度於分釐尺上量之得四寸即四十尺為所求正方之每一邊也蓋一分之積既為一百尺則十六分之積必為一千六百尺而一分相距之度既為方積一百尺之每一邊則十六分相距之度必為方積一千六百尺之每一邊矣又以一寸當十尺故四寸即為四十尺也

設如有正方面積九千零二十五尺問每一邊幾何

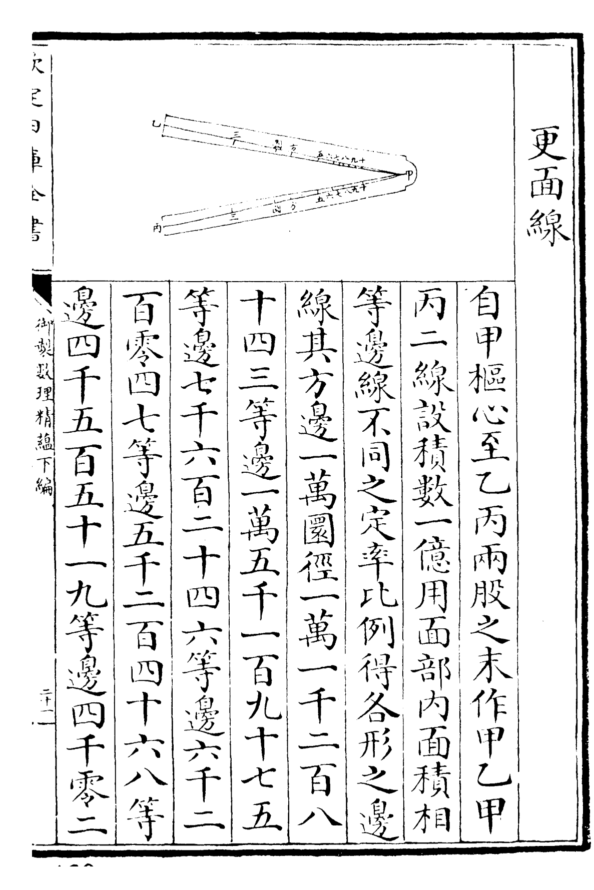
法以比例尺分面線第一百分之兩點

依分釐尺一寸之度展開勿令移動乃以一寸之一百釐作一百尺自乘得一萬尺與積數九千零二十五尺相較其比例如一百與九十有餘即取分面線第九十分有餘相距之度於分釐尺上量之得九分五釐即九十五尺為所求正方之每一邊也盖一百分之積既為一萬尺則九十分有餘之積必為九千餘尺而一百分相距之度既為方積一

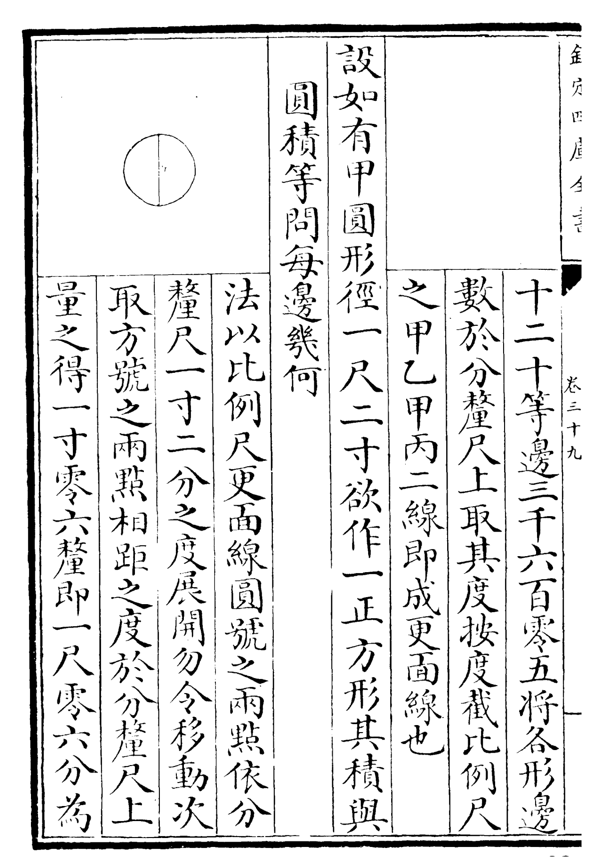
萬尺之每一邊則九十分有餘相距之度必為方積九千餘尺之每一邊矣又以一寸當一百尺故九分五釐即為九十五尺也



更面線



自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線設積數一億用面部內面積相等邊線不同之定率比例得各形之邊線其方邊一萬圜徑一萬一千二百八十四三等邊一萬五千一百九十七五等邊七千六百二十四六等邊六千二百零四七等邊五千二百四十六八等邊四千五百五十一九等邊四千零二



十二十等邊三千六百零五將各形邊數於分釐尺上取其度按度截比例尺之甲乙甲丙二線即成更面線也

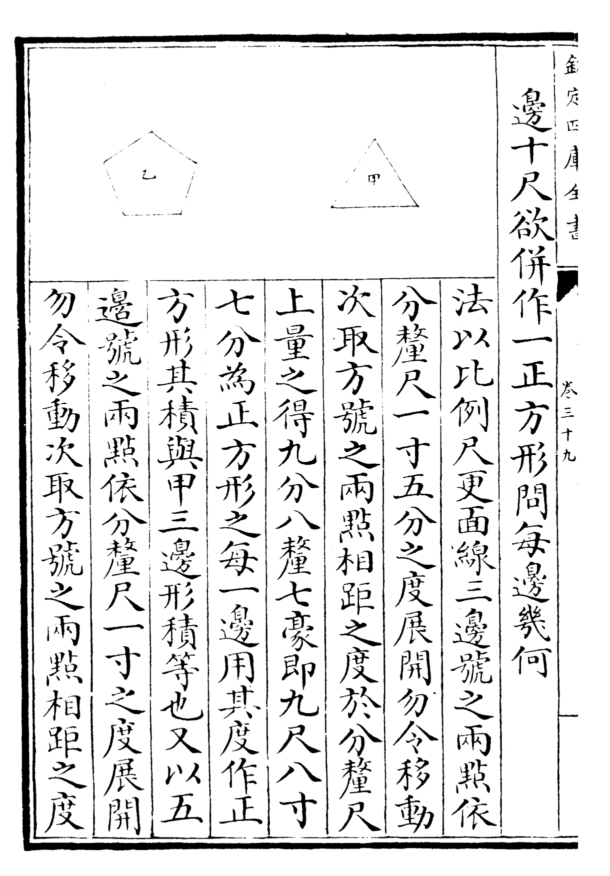
設如有甲圓形徑一尺二寸欲作一正方形其積與圓積等問每邊幾何

法以比例尺更面線圓號之兩點依分釐尺一寸二分之度展開勿令移動次取方號之兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸零六釐即一尺零六分為

正方形之每一邊用其度作正方形其積與圜積等也蓋圓號與方號之比例原為同積之圓徑與方邊之比例則其兩距度之比例亦必為圓徑與方邊之比例今圓號相距之度既為圓徑則方號相距之度必為方邊無疑矣又以一寸二分當圓徑一尺二寸故一寸零六釐即為方邊一尺零六分也

設如有甲三邊形每邊一十五尺又有乙五邊形每

邊十尺欲併作一正方形問每邊幾何



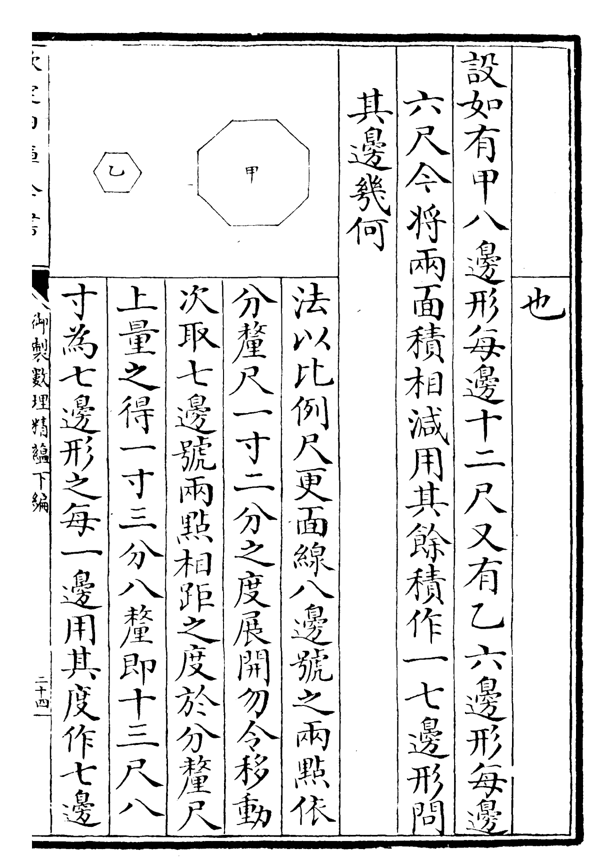
法以比例尺更面線三邊號之兩點依分釐尺一寸五分之度展開勿令移動次取方號之兩點相距之度於分釐尺上量之得九分八釐七豪即九尺八寸七分為正方形之每一邊用其度作正方形其積與甲三邊形積等也又以五邊號之兩點依分釐尺一寸之度展開勿令移動次取方號之兩點相距之度

於分釐尺上量之得一寸三分一釐即十三尺一寸為正方形之每一邊用其度作正方形其積與乙五邊形積等也乃將兩正方形用分面線求其積之比例以分面線第十分之兩點依小方邊九分八釐七豪之度展開勿令移動復以大方邊一寸三分一釐之度於分面線上尋至第十七分六釐之處其相距之度恰合即兩方形之比例為十分與

十七分六釐併之得二十七分六釐即取分面線第二十七分六釐相距之度於分釐尺上量之得一寸六分四釐即十六尺四寸為正方形之每一邊用其度作正方形其積與甲乙兩形之積等也蓋甲乙兩形不同類不能得其比例即不能相加故先用更面線將甲乙兩形俱變為正方形復用分面線求其比例而併之即得所求大正方形之一邊

也

設如有甲八邊形每邊十二尺又有乙六邊形每邊六尺令將兩面積相減用其餘積作一七邊形問其邊幾何



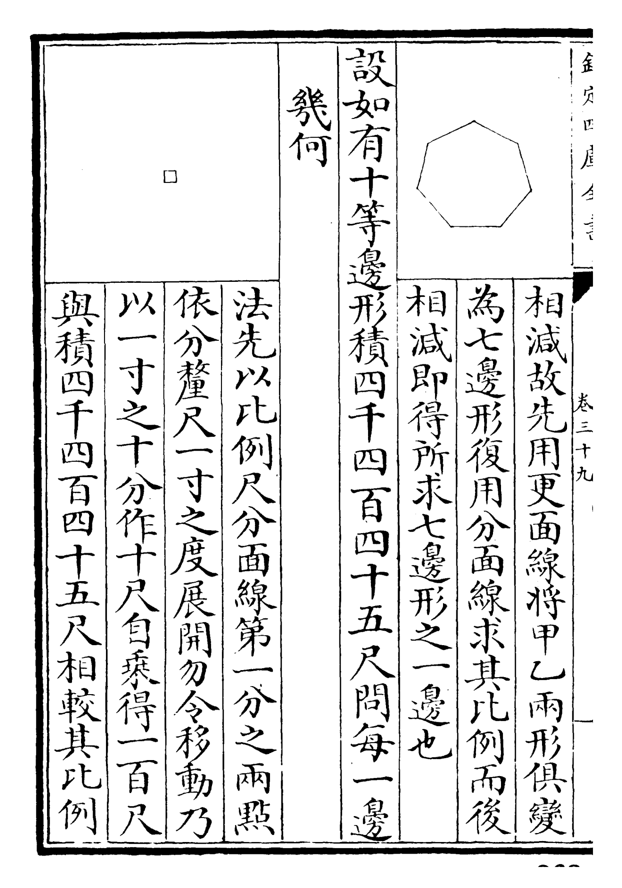
法以比例尺更面線八邊號之兩點依分釐尺一寸二分之度展開勿令移動次取七邊號兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸三分八釐即十三尺八寸為七邊形之每一邊用其度作七邊

甲

乙

形其積與甲八邊形積等也又以六邊號之兩點依分釐尺六分之度展開勿令移動次取七邊號兩點相距之度於分釐尺上量之得五分零七毫即五尺零七分為七邊形之每一邊用其度作七邊形其積與乙六邊形積等也乃將兩七邊形用分面線求其比例以分面線第十分之兩點依小七邊形之邊五分零七毫之度展開勿令移動復以大

七邊形之邊一寸三分八釐之度於分面線上尋至第七十八分之處其相距之度恰合即兩七邊形之比例為十分與七十八分相減餘六十八分即取分面線第六十八分相距之度於分釐尺上量之得一寸三分即十三尺為所求七邊形之每一邊用其度作七邊形其積與甲乙兩形相減之餘積等也蓋甲乙兩形不同類不能得其比例即不能

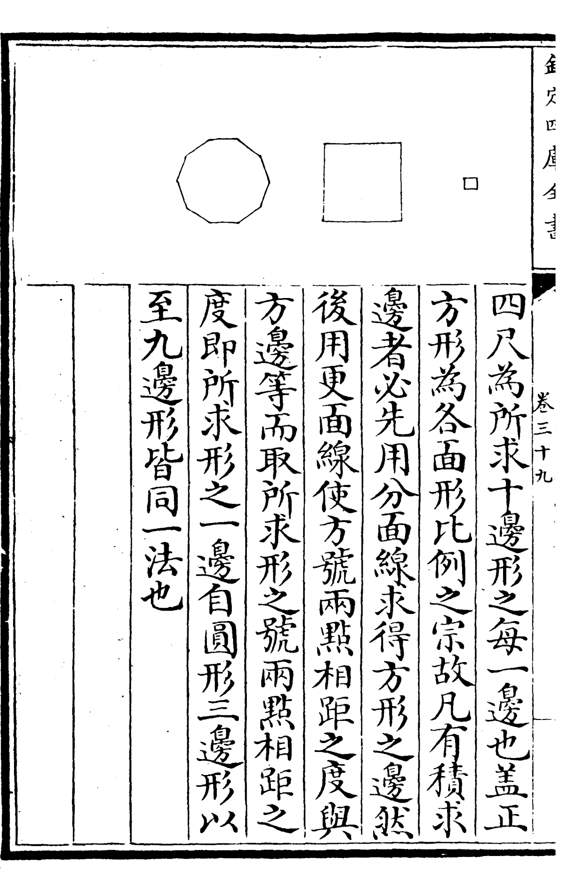


相減故先用更面線將甲乙兩形俱變
為七邊形復用分面線求其比例而後
相減即得所求七邊形之一邊也

設如有十等邊形積四千四百四十五尺問每一邊
幾何

法先以比例尺分面線第一分之兩點
依分釐尺一寸之度展開勿令移動乃
以一寸之十分作十尺自乘得一百尺
與積四千四百四十五尺相較其比例

如一與四十四又九之五即取分面線第四十四分又九之五相距之度於分釐尺上量之得六寸六分又三之二即六十六尺又三分尺之二為方形之一邊用其度作正方形其積與十邊形積等也乃以更面線方號之兩點依方形每邊六寸六分又三之二之度展開勿令移動次取十邊號兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸四分即二十



四尺為所求十邊形之每一邊也盖正方形為各面形比例之宗故凡有積求邊者必先用分面線求得方形之邊然後用更面線使方號兩點相距之度與方邊等而取所求形之號兩點相距之度即所求形之一邊自圓形三邊形以至九邊形皆同一法也

分體線

自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線依幾何原本十二卷二十二節之法分之即為分體線也或設正方體界一百釐其積數一百萬釐以二因之得二百萬釐開立方得一百二十六釐為積二百萬釐之根又以三因之得三百萬釐開立方得一百四十四釐為積三百萬釐之根照此屢倍積數開立方

將所得之數於分釐尺上取其度按度截比例尺之甲乙甲丙二線即成分體線也

設如有甲乙丙三正方體甲形每邊二寸其積數之比例甲為一分乙為三分丙為四分令欲作一大正方體與甲乙丙三正方體之積等問其邊幾何

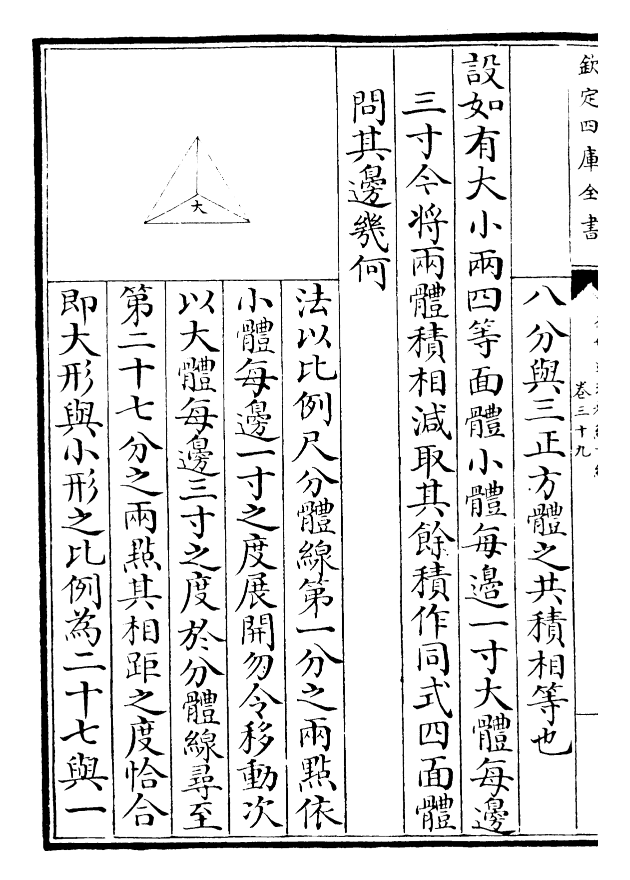
甲

法以比例尺分體線第一分之兩點依甲正方體每邊二寸之度展開勿令移動乃併三正方體積共八分即取八分

兩點相距之度於分釐尺上量之得四寸即所求大正方體之每一邊用其度作正方體其積與甲乙丙三正方體之共積等也蓋八分所作正方體原比一分所作正方體大八倍則八分相距之度所作正方體亦必比一分相距之度所作正方體大八倍矣一分相距之度即甲正方體之一邊其積為一分則以八分相距之度所作正方體其積必為

八分與三正方體之共積相等也

設如有大小兩四等面體小體每邊一寸大體每邊三寸令將兩體積相減取其餘積作同式四面體問其邊幾何



法以比例尺分體線第一分之兩點依小體每邊一寸之度展開勿令移動次以大體每邊三寸之度於分體線尋至第二十七分之兩點其相距之度恰合即大形與小形之比例為二十七與一

小

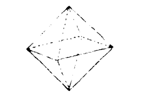
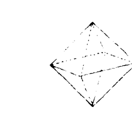
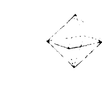
相減餘二十六為較積即取分體線第二十六分兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸九分六釐即較體之每一邊也蓋大小同式體之比例同於相當界所作正方體之比例見幾何原本十卷第七節今二十七分所作正方體與一分所作正方體之比例為二十七與一則二十七分相距之度所作正方體與一分相距之度所作正方體之比例亦必為二十

七與一矣夫大小兩距度即大小兩體之相當界其所作兩正方體之比例既為二十七與一則大小兩四面體之比例亦必為二十七與一矣既得兩體之比例乃相減以得較既得較積之比例復用積以求邊即得所求之邊數也

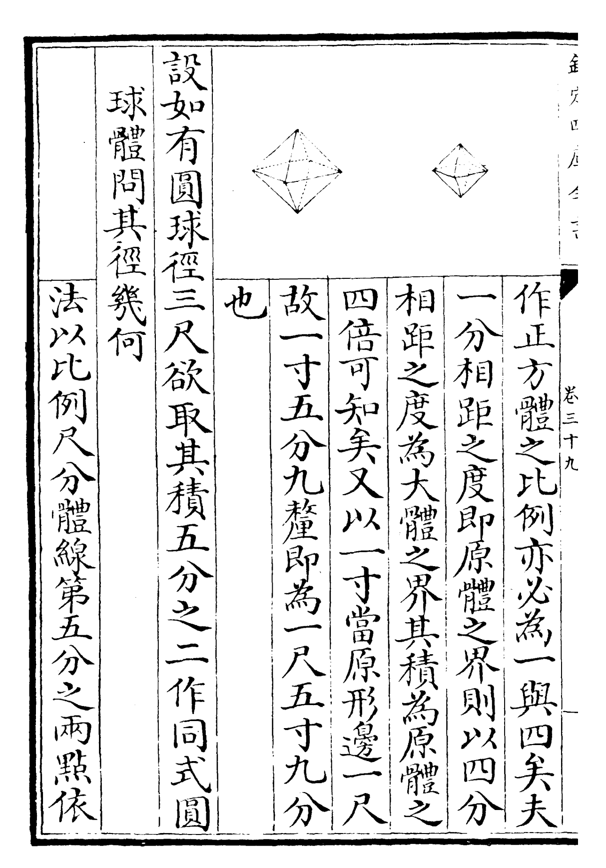
小
大

設如有八等面體每邊一尺欲四倍其積作同式八等面體問其每邊幾何

法以比例尺分體線第一分之兩點依

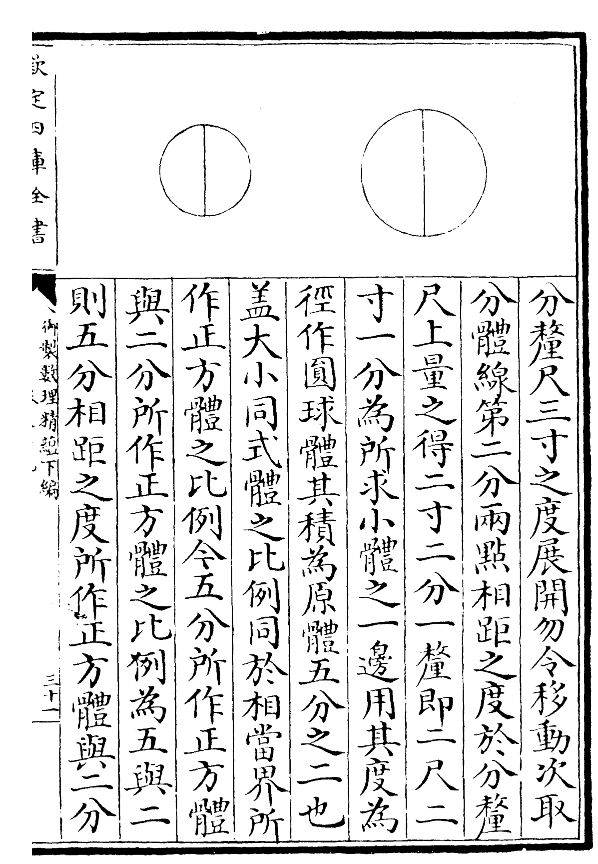
分釐尺一寸之度展開勿令移動次取第四分兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸五分九釐即一尺五寸九分為所求體之一邊用其度作八等面體其積與原體之四倍等也蓋大小同式體之比例同於相當界所作正方體之比例令一分所作正方體與四分所作正方體之比例為一與四則一分相距之度所作正方體與四分相距之度所



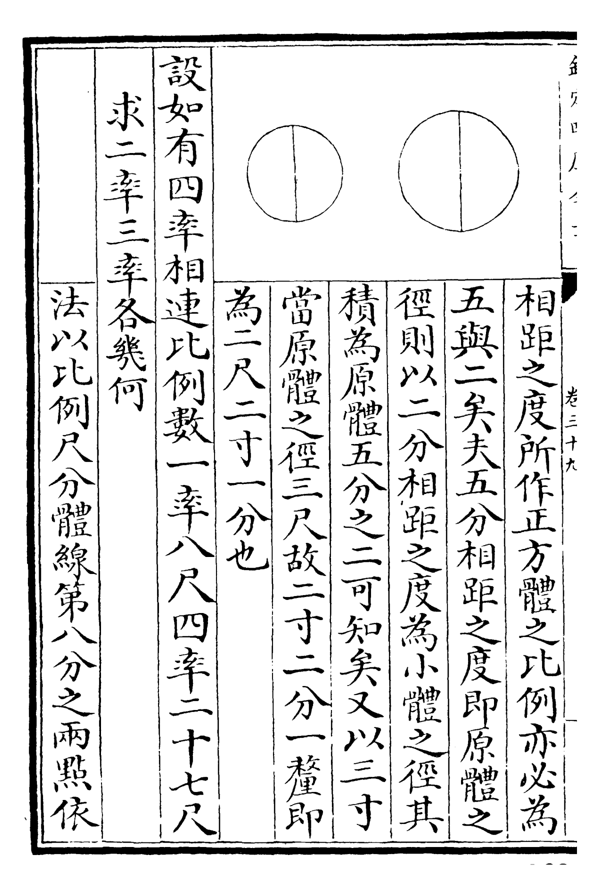
作正方體之比例亦必為一與四矣夫一分相距之度即原體之界則以四分相距之度為大體之界其積為原體之四倍可知矣又以一寸當原形邊一尺故一寸五分九釐即為一尺五寸九分也

設如有圓球徑三尺欲取其積五分之二作同式圓球體問其徑幾何

法以比例尺分體線第五分之兩點依



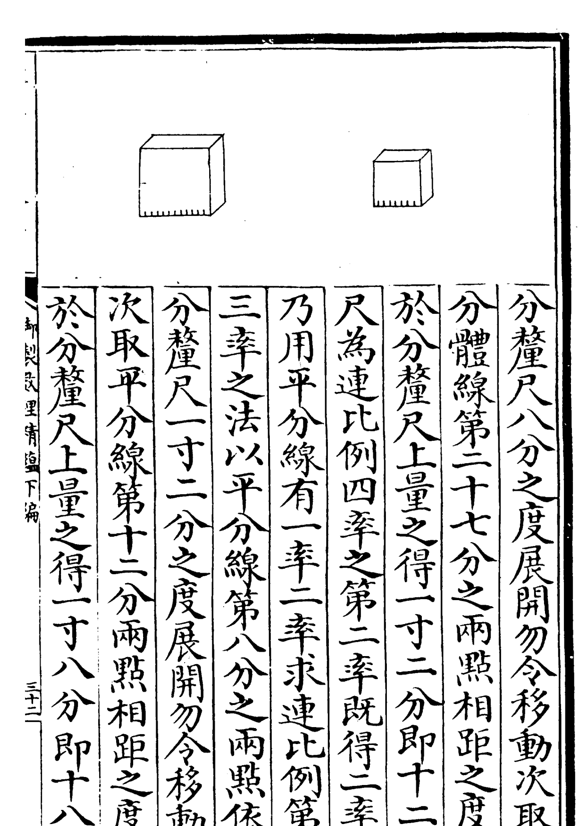
分釐尺三寸之度展開勿令移動次取分體線第二分兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸二分一釐即二尺二寸一分為所求小體之一邊用其度為徑作圓球體其積為原體五分之二也蓋大小同式體之比例同於相當界所作正方體之比例令五分所作正方體與二分所作正方體之比例為五與二則五分相距之度所作正方體與二分



相距之度所作正方體之比例亦必為五與二矣夫五分相距之度即原體之徑則以二分相距之度為小體之徑其積為原體五分之二可知矣又以三寸當原體之徑三尺故二寸二分一釐即為二尺二寸一分也

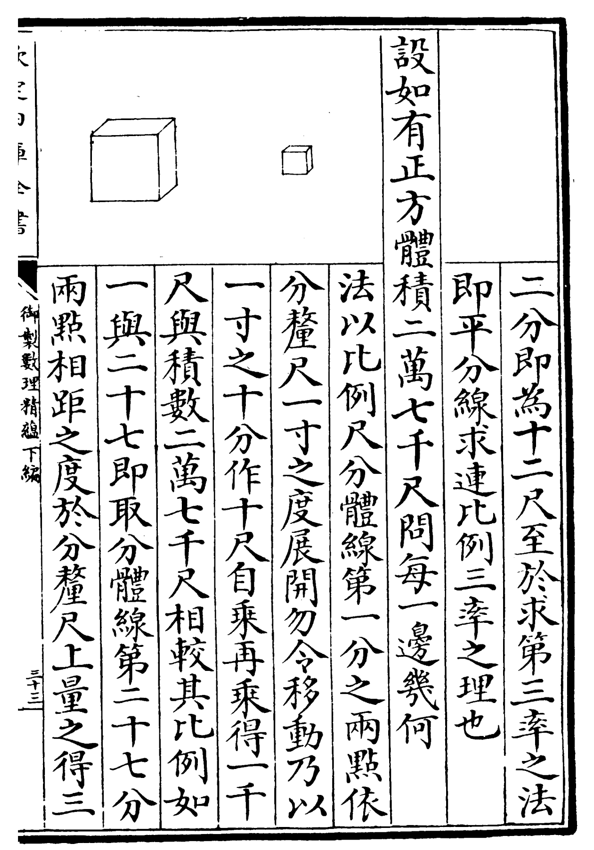
設如有四率相連比例數一率八尺四率二十七尺求二率三率各幾何

法以比例尺分體線第八分之兩點依



分釐尺八分之度展開勿令移動次取分體線第二十七分之兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸二分即十二尺為連比例四率之第二率既得二率乃用平分線有一率二率求連比例第三率之法以平分線第八分之兩點依分釐尺一寸二分之度展開勿令移動次取平分線第十二分兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸八分即十八

尺為連比例四率之第三率也盖相連比例四率其一率所作正方體與二率所作正方體之比例同於一率與四率之比例今一率為八尺四率為二十七尺則一率所作正方體與二率所作正方體之比例即如八與二十七之比例故以八分相距之度為一率之數則二十七分相距之度必為二率之數可知矣又一率用八分當八尺故二率一寸



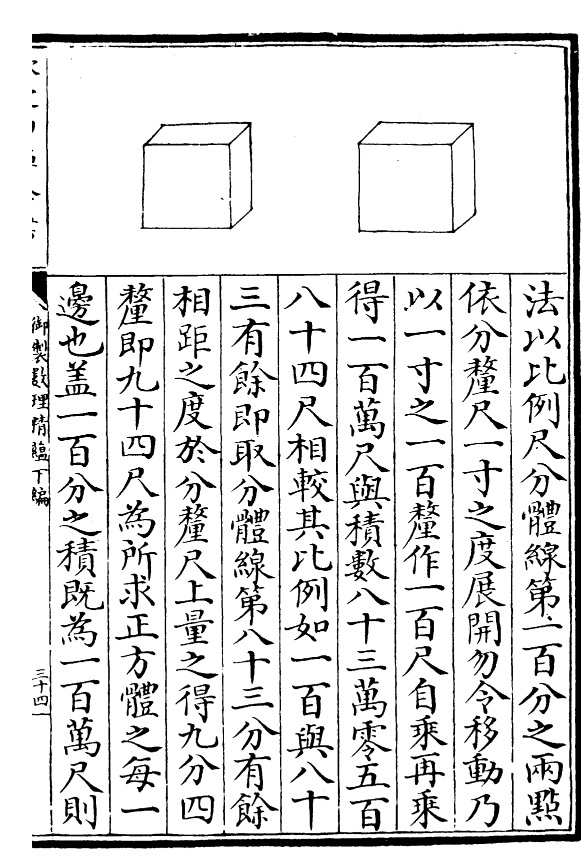
二分即爲十二尺至於求第三率之法即平分線求連比例三率之理也

設如有正方體積二萬七千尺問每一邊幾何

法以比例尺分體線第一分之兩點依分釐尺一寸之度展開勿令移動乃以一寸之十分作十尺自乘再乘得一千尺與積數二萬七千尺相較其比例如一與二十七即取分體線第二十七分兩點相距之度於分釐尺上量之得三

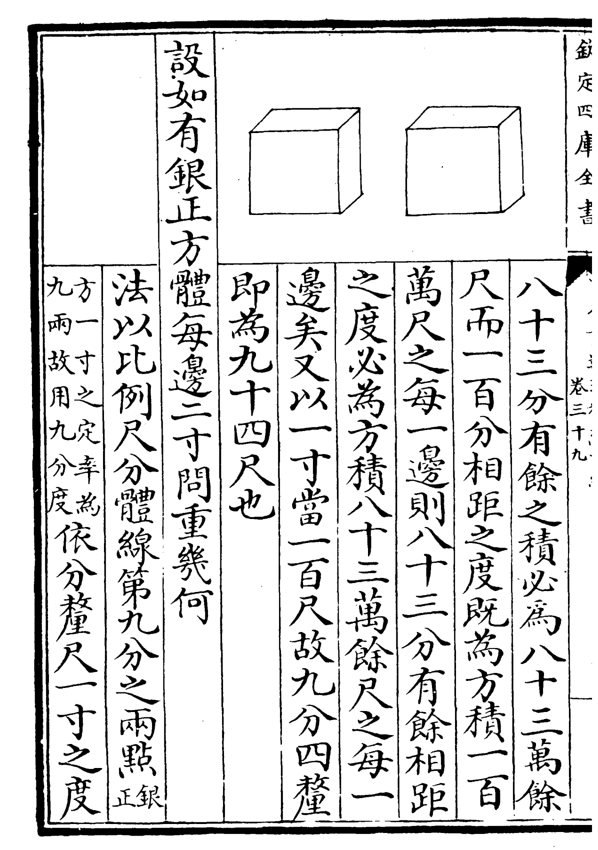
寸即三十尺為所求正方體之每一邊也蓋一分之積既為一千尺則二十七分之積必為二萬七千尺而一分相距之度既為方積一千尺之每一邊則二十七分相距之度必為方積二萬七千尺之每一邊矣又以一寸當十尺故三寸即為三十尺也

設如有正方體積八十三萬零五百八十四尺問每一邊幾何



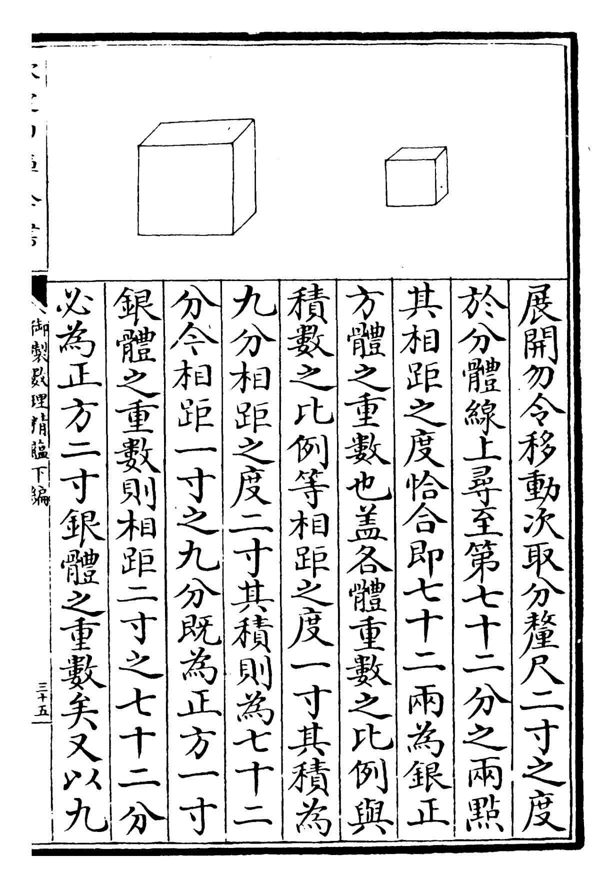
法以比例尺分體線第一百分之兩點依分釐尺一寸之度展開勿令移動乃以一寸之一百釐作一百尺自乘再乘得一百萬尺與積數八十三萬零五百八十四尺相較其比例如一百與八十三有餘即取分體線第八十三分有餘相距之度於分釐尺上量之得九分四釐即九十四尺為所求正方體之每一邊也盖一百分之積既為一百萬尺則

八十三分有餘之積必為八十三萬餘尺而一百分相距之度既為方積一百萬尺之每一邊則八十三分有餘相距之度必為方積八十三萬餘尺之每一邊矣又以一寸當一百尺故九分四釐即為九十四尺也



設如有銀正方體每邊二寸問重幾何

法以比例尺分體線第九分之兩點銀正方一寸之定率為九兩故用九分度依分釐尺一寸之度



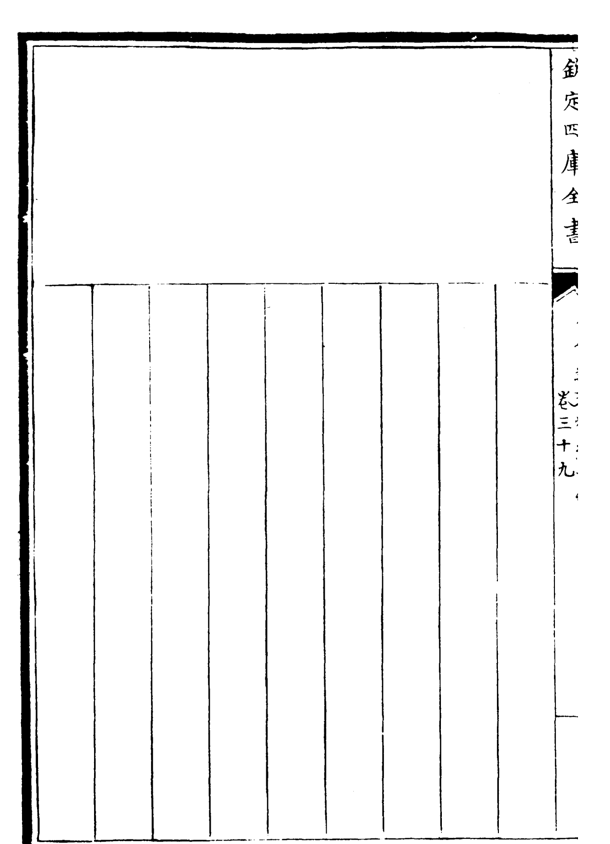
展開勿令移動次取分釐尺二寸之度於分體線上尋至第七十二分之兩點其相距之度恰合即七十二兩為銀正方體之重數也蓋各體重數之比例與積數之比例等相距之度一寸其積為九分相距之度二寸其積則為七十二分令相距一寸之九分既為正方一寸銀體之重數則相距二寸之七十二分必為正方二寸銀體之重數矣又以九

設如有大銅球體徑二寸重三十一兩四錢一分令有小銅球體徑一寸二分問重幾何

分當九兩故七十二分為七十二兩也

法以比例尺分體線第三十一分四釐之處依大球徑二寸之度展開勿令移動次取小球徑一寸二分之度於分體線上尋至第六分七釐有餘之處其相距之度恰合即六兩七錢有餘為小銅球體之重數也蓋各體重數之比例與

積數之比例等相距之度二寸其積為三十一分四釐相距之度一寸二分其積則為六分七釐今相距一寸之三十一分四釐既為徑二寸大銅球體之重數則相距一寸二分之六分七釐必為徑一寸二分小銅球體之重數矣又以三十一分四釐當三十一兩四錢故六分七釐即為六兩七錢也


欽定四庫全書
卷三十九

更體線

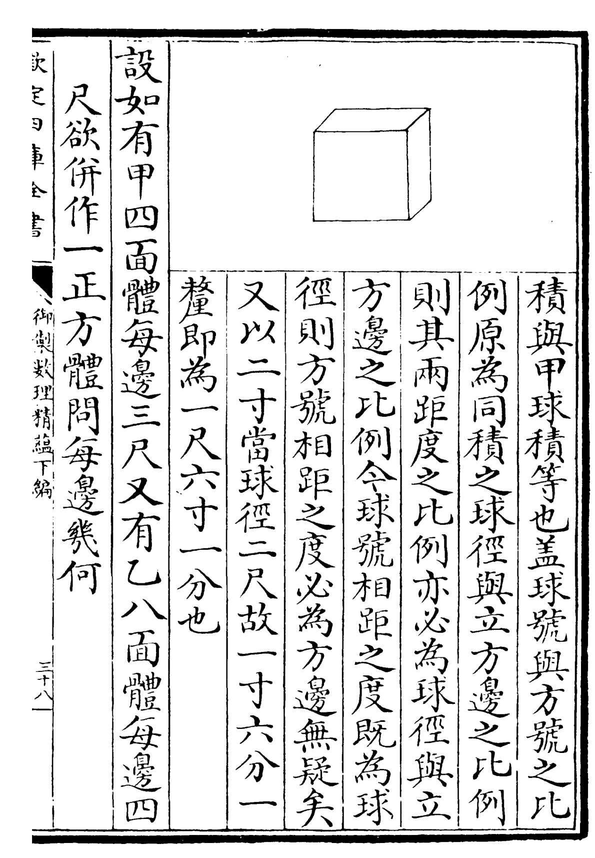
自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線設積數一兆用體部内體積相等邊線不同之定率比例得各體之邊線其立方邊一萬球徑一萬二千四百零七四面體邊二萬零三百九十七八面體邊一萬二千八百四十九十二面體邊五千零七十二二十面體邊七千七百一十將各體邊線數於分釐尺上

取其度按度截比例尺之甲乙甲丙二線即成更體線也

設如有甲球體徑二尺欲作一正方體其積與球積等問每邊幾何

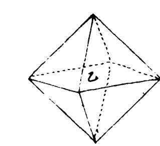
甲

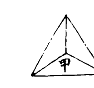
法以比例尺更體線球號之兩點依分釐尺二寸之度展開勿令移動次取方號之兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸六分一釐即一尺六寸一分為正方體之每一邊用其度作正方體其



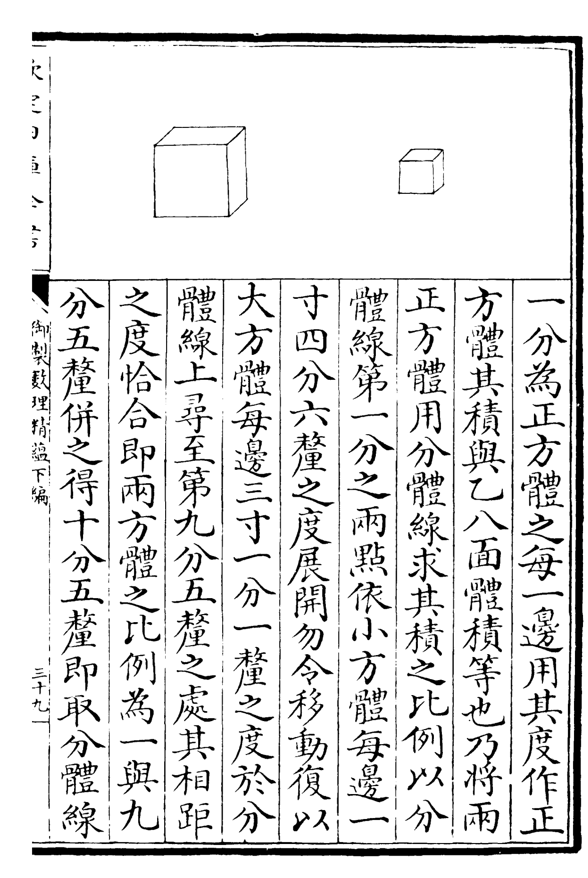
積與甲球積等也蓋球號與方號之比例原為同積之球徑與立方邊之比例則其兩距度之比例亦必為球徑與立方邊之比例今球號相距之度既為球徑則方號相距之度必為方邊無疑矣又以二寸當球徑二尺故一寸六分一釐即為一尺六寸一分也

設如有甲四面體每邊三尺又有乙八面體每邊四尺欲併作一正方體問每邊幾何





法以比例尺更體線四面號之兩點依分釐尺三寸之度展開勿令移動次取方號兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸四分六釐即一尺四寸六分為正方體之每一邊用其度作正方體其積與甲四面體積等也又以八面號之兩點依分釐尺四寸之度展開勿令移動次取方號兩點相距之度於分釐尺上量之得三寸一分一釐即三尺一寸



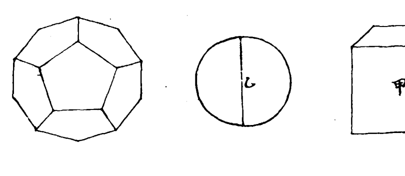
一分為正方體之每一邊用其度作正方體其積與乙八面體積等也乃將兩正方體用分體線求其積之比例以分體線第一分之兩點依小方體每邊一寸四分六釐之度展開分令移動復以大方體每邊三寸一分一釐之度於分體線上尋至第九分五釐之處其相距之度恰合即兩方體之比例為一與九分五釐併之得十分五釐即取分體線

第十分五釐相距之度於分釐尺上量之得三寸二分即三尺二寸為正方體之每一邊用其度作正方體其積與甲乙兩體之積等也蓋甲乙兩體不同類不能得其比例即不能相加故先用更體線將甲乙兩體俱變為正方體復用分體線求其比例而併之即得所求大方體之一邊也

設如有甲正方體每邊二尺又有乙球體徑亦二尺

今將兩體積相減用其餘積作十二面體問其邊幾何

法以比例尺更體線方號之兩點依分釐尺二寸之度展開勿令移動次取十二面號兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸零一釐四豪即一尺零一分四釐為十二面體之每一邊用其度作十二面體其積與甲正方體積等也又以球號之兩點依分釐尺二寸之度展



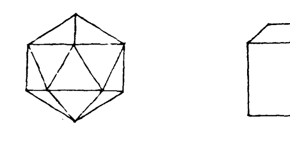
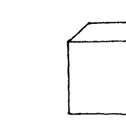
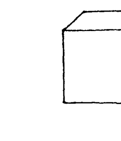
開勿令移動次取十二面號兩點相距之度於分釐尺上量之得八分一釐七豪即八寸一分七釐為十二面體之每一邊用其度作十二面體其積與乙球體積等也乃將兩十二面體用分體線求其比例以分體線第十分之兩點依小十二面體每邊八分一釐七豪之度展開勿令移動復以大十二面體每邊一寸零一釐四豪之度於分體線上尋

至第十九分其相距之度恰合即兩十二面體之比例為十分與十九分相減餘九分即取分體線第九分兩點相距之度於分釐尺上量之得七分九釐即七寸九分為所求十二面體之每一邊用其度作十二面體與甲乙兩體相減之餘積等也蓋甲乙兩體不同類不能得其比例即不能相減故先用更體線將甲乙兩體俱變為十二面體復用分

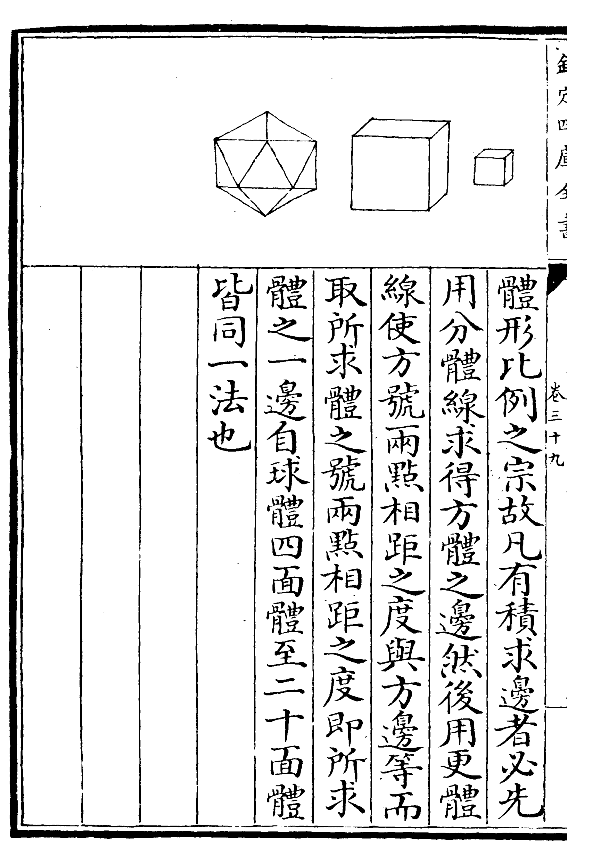
體線求其比例而後相減即得所求十二面體之一邊也

設如有二十面體積一萬七千四百五十五尺問每一邊幾何

法先以比例尺分體線第一分之兩點依分釐尺一寸之度展開勿令移動乃以一寸之十分作十尺自乘再乘得一千尺與積數一萬七千四百五十五尺相較其比例如一與十七又九之五即

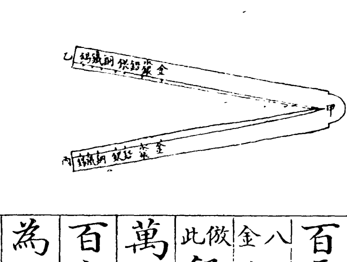
取分體線第十七分又九之五相距之度於分釐尺上量之得二寸五分九釐即二十五尺九寸為正方體之一邊用其度作正方體其積與二十面體積等也乃以更體線方號之兩點依正方體每邊二寸五分九釐之度展開勿令移動次取二十面號兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸即二十尺為所求二十面體之每一邊也葢正方體為各



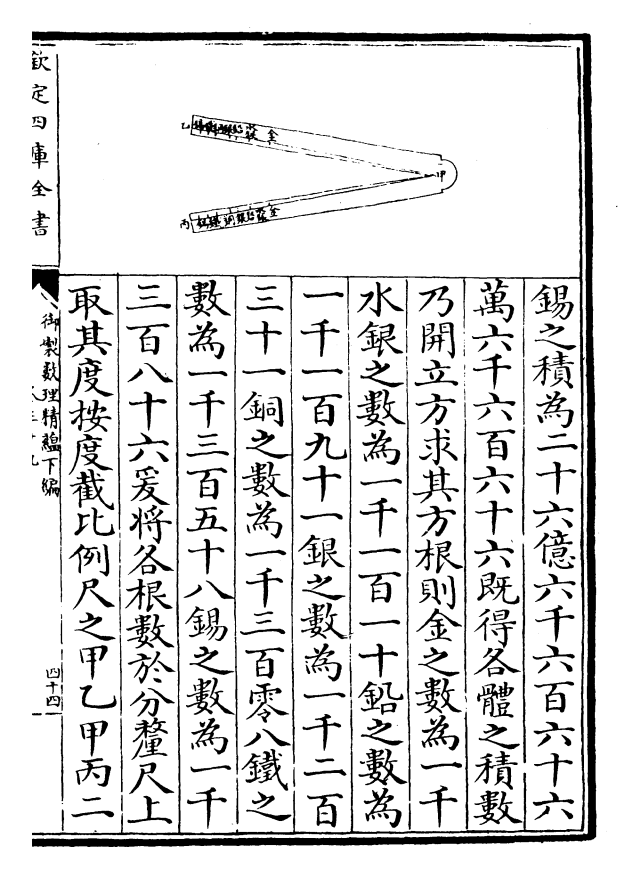
體形比例之宗故凡有積求邊者必先用分體線求得方體之邊然後用更體線使方號兩點相距之度與方邊等而取所求體之號兩點相距之度即所求體之一邊自球體四面體至二十面體皆同一法也

五金線

自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線用各體權度比例定率數金重十六兩八錢水銀重十二兩二錢八分鉛重九兩九錢三分銀重九兩銅重七兩五錢鐵重六兩七錢錫重六兩三錢為各體正方一寸輕重之比例定率數有三十餘種尺不能盡載惟此數者共用為多故止載此若重數相等則其積數必不同故又用轉比例之法



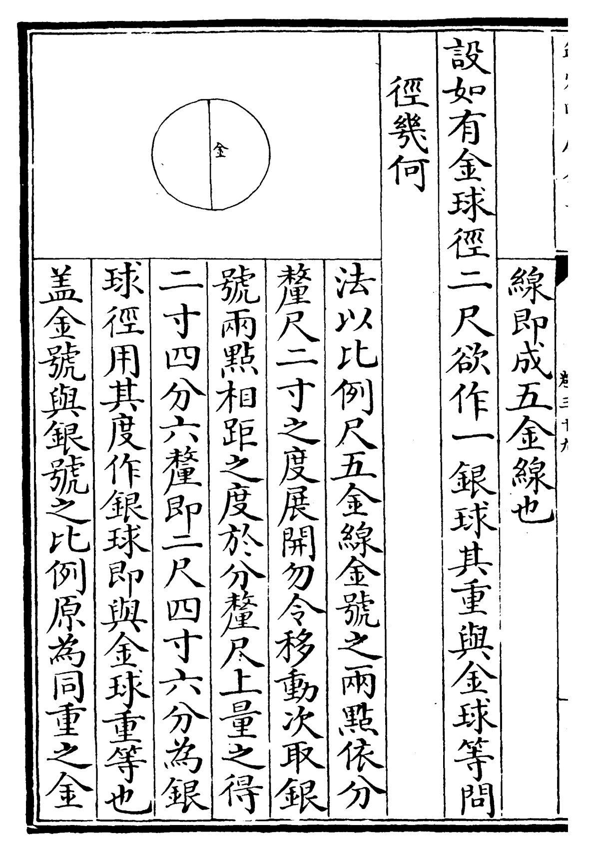
求其體積之比例命金之積為十億則與金同重之水銀積為十三億六千八百零七萬八千一百七十五（水銀重十二兩二錢八分為一率金重十六兩八錢為二率金積十億為三率得四率即水銀積餘倣此）鉛之積為十六億九千一百八十四萬二千九百銀之積為十八億六千六百六十六萬六千六百六十六銅之積為二十二億四千萬鐵之積為二十五億零七百四十六萬二千六百八十六



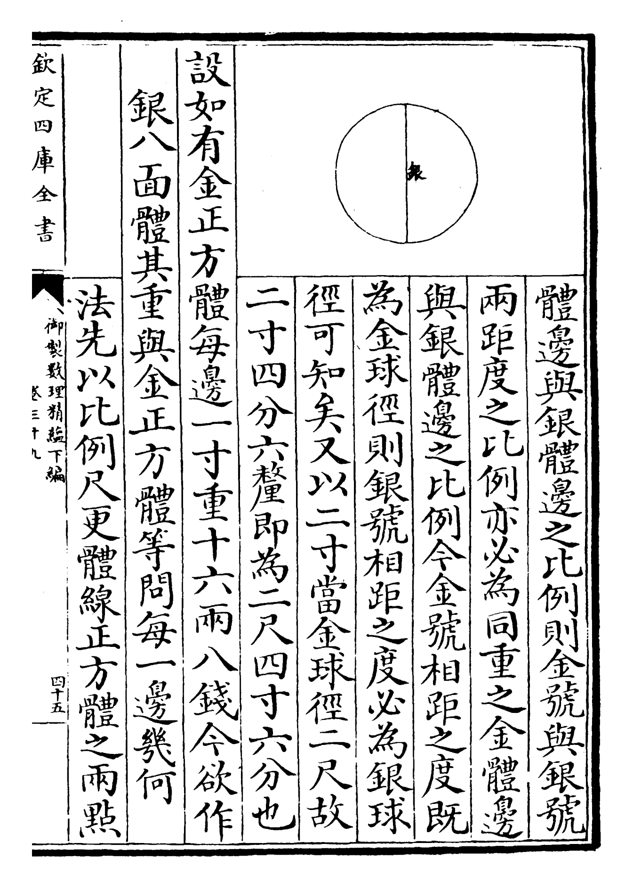
錫之積為二十六億六千六百六十六萬六千六百六十六既得各體之積數乃開立方求其方根則金之數為一千水銀之數為一千一百一十鉛之數為一千一百九十一銀之數為一千二百三十一銅之數為一千三百零八鐵之數為一千三百五十八錫之數為一千三百八十六爰將各根數於分釐尺上取其度按度截比例尺之甲乙甲丙二

線即成五金線也

設如有金球徑二尺欲作一銀球其重與金球等問徑幾何



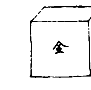
法以比例尺五金線金號之兩點依分釐尺二寸之度展開勿令移動次取銀號兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸四分六釐即二尺四寸六分為銀球徑用其度作銀球即與金球重等也蓋金號與銀號之比例原為同重之金

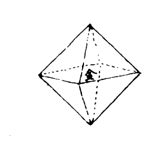


體邊與銀體邊之比例則金號與銀號兩距度之比例亦必為同重之金體邊與銀體邊之比例令金號相距之度既為金球徑則銀號相距之度必為銀球徑可知矣又以二寸當金球徑二尺故二寸四分六釐即為二尺四寸六分也

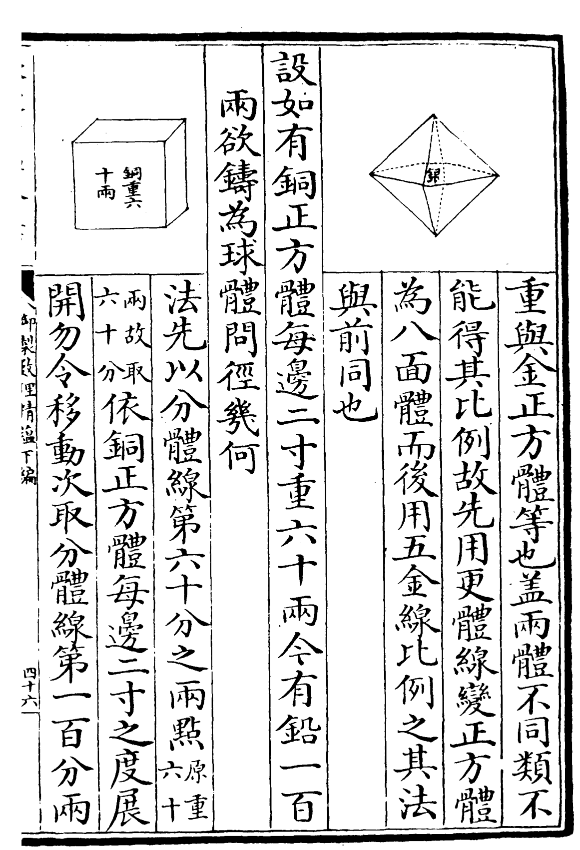
設如有金正方體每邊一寸重十六兩八錢今欲作銀八面體其重與金正方體等問每一邊幾何

法先以比例尺更體線正方體之兩點





依正方每邊一寸之度展開勿令移動次取八面體兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸二分八釐有餘即為金正方體等重之金八面體之每一邊數乃以五金線金號之兩點依金八面體每邊一寸二分八釐之度展開勿令移動次取銀號兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸五分八釐有餘即為銀八面體之每一邊用其度作八面體其



重與金正方體等也蓋兩體不同類不能得其比例故先用更體線變正方體為八面體而後用五金線比例之其法與前同也

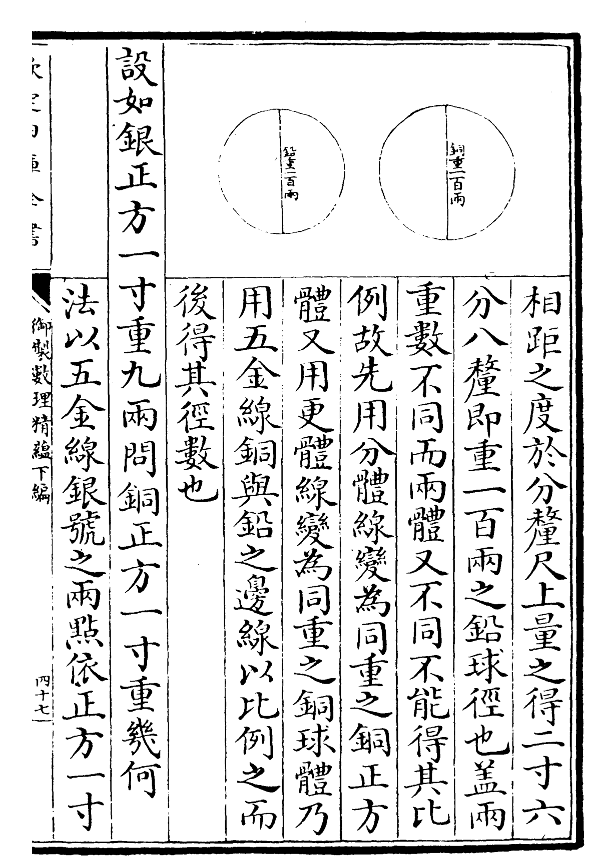
設如有銅正方體每邊二寸重六十兩今有鉛一百兩欲鑄為球體問徑幾何

法先以分體線第六十分之兩點（原重六十兩故取六十分）依銅正方體每邊二寸之度展開勿令移動次取分體線第一百分兩

銅重一百兩

銅重六十兩

點相距之度（今重一百兩故取一百分）於分釐尺上量之得二寸三分七釐即重一百兩之銅正方體之每一邊又以更體線正方號之兩點依正方每邊二寸三分七釐之度展開勿令移動次取球號兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸九分四釐即重一百兩之銅球徑復以五金線銅號之兩點依銅球徑二寸九分四釐之度展開勿令移動次取鉛號兩點



相距之度於分釐尺上量之得二寸六分八釐即重一百兩之鉛球徑也葢兩重數不同而兩體又不同不能得其比例故先用分體線變為同重之銅正方體又用更體線變為同重之銅球體乃用五金線銅與鉛之邊線以比例之而後得其徑數也

設如銀正方一寸重九兩問銅正方一寸重幾何

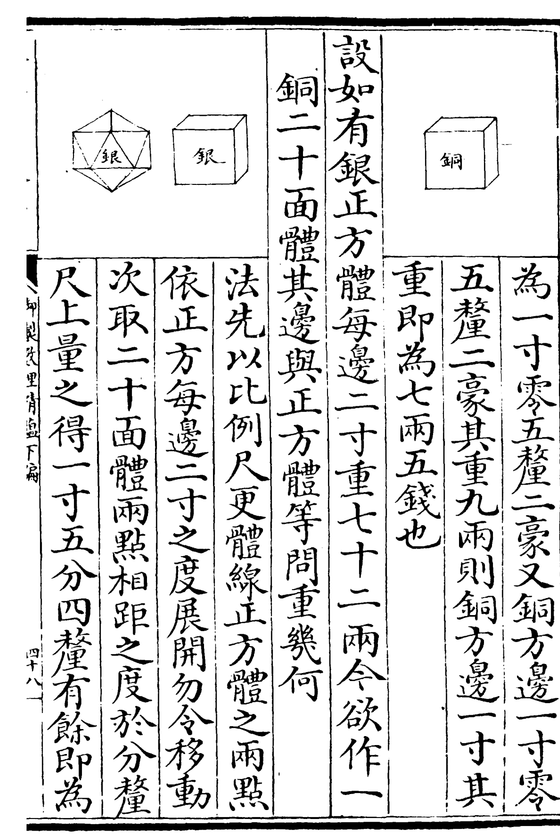
法以五金線銀號之兩點依正方一寸

銅

銀

之度展開勿令移動次取銀號兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸零五釐二豪即為重九兩之銅正方邊數乃以分體線九十分之兩點依一寸零五釐二豪之度展開勿令移動而以令銅正方一寸之度於分體線上尋至七十五分之兩點其相距之度恰合即七兩五錢為銅正方一寸重數也蓋銀重九兩其方邊一寸則銅重九兩其方邊必

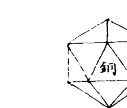
為一寸零五釐二豪又銅方邊一寸零五釐二豪其重九兩則銅方邊一寸其重即為七兩五錢也

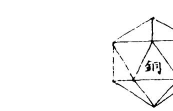
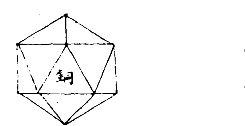


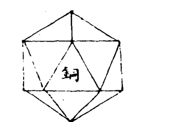
設如有銀正方體每邊二寸重七十二兩今欲作一銅二十面體其邊與正方體等問重幾何

法先以比例尺更體線正方體之兩點依正方每邊二寸之度展開勿令移動次取二十面體兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸五分四釐有餘即為

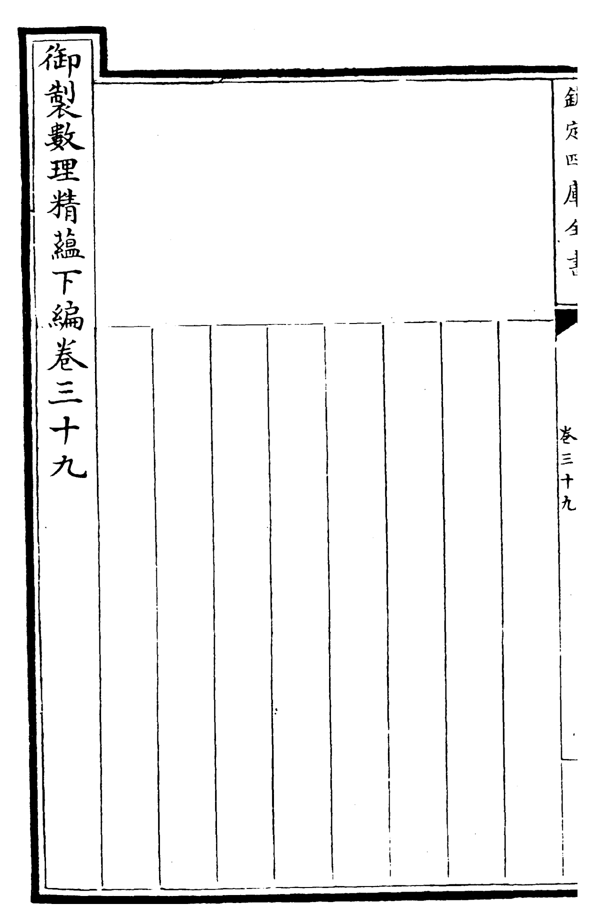
銀正方體等重之銀二十面體之每一邊乃以五金線銀號之兩點依銀二十面體每邊一寸五分四釐之度展開分令移動次取銅號兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸六分三釐有餘即為銀二十面體同重之銅二十面體之每一邊復以分體線第七十二分之兩點依銅二十面體每邊一寸六分三釐之度展開分令移動而以令所作銅二





十面體每邊二寸之度於分體線上尋至第一百三十分有餘之處其相距之度恰合即一百三十兩有餘為銅二十面體之重數也蓋兩體不同類不能得其比例故先用更體線變正方體為二十面體又用五金線變銀二十面體為銅二十面體復用分體線有邊求重之法比例之然後得其重數也


御製數理精蘊下編卷三十九
欽定四庫全書
卷三十九



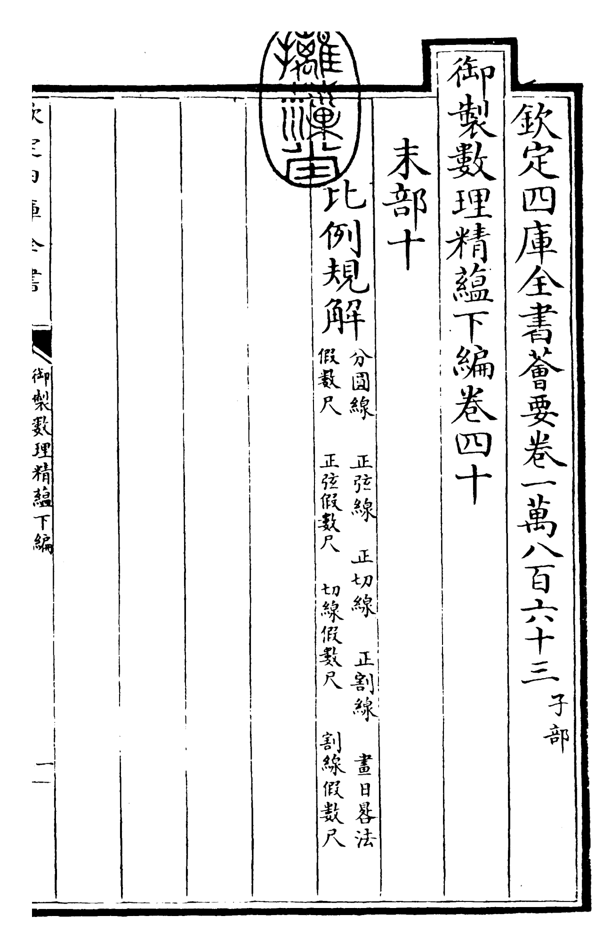
總校官庶吉士臣張能照
校對官中官正臣郭長發
謄録監生臣楊　金
繪圖監生臣李　鈞

欽定四庫全書薈要

子部

御製數理精蘊下編卷四十

詳校官主事臣陳木



欽定四庫全書薈要卷一萬八百六十三 子部

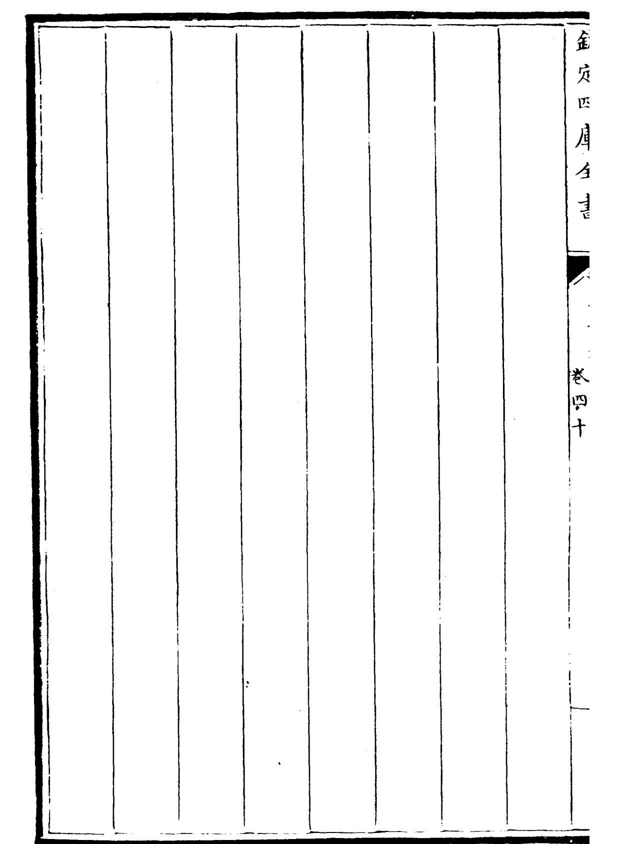
御製數理精蘊下編卷四十

末部十

比例規解

分圓線 正弦線 正切線 正割線 晝日晷法

假數尺 正弦假數尺 切線假數尺 割線假數尺

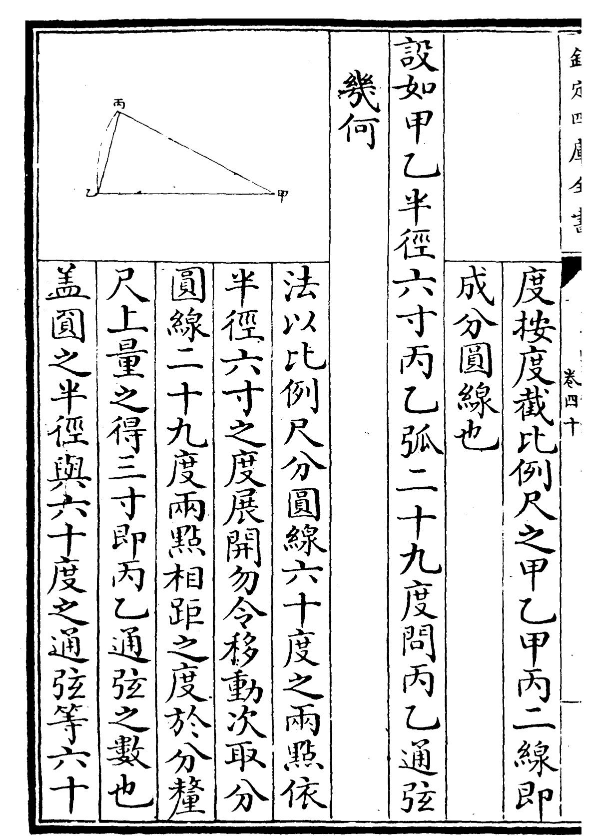


分圓線 即圓內之通弦線

自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線依幾何原本十二卷二十節之法分之即為分圓線也或用八線表三十分之正弦倍之即一度之通弦一度之正弦倍之即二度之通弦一度三十分之正弦倍之即三度之通弦至於九十度之正弦倍之即一百八十度之通弦以所得通弦之數於分釐尺上取其

度梭度截比例尺之甲乙甲丙二線即成分圓線也

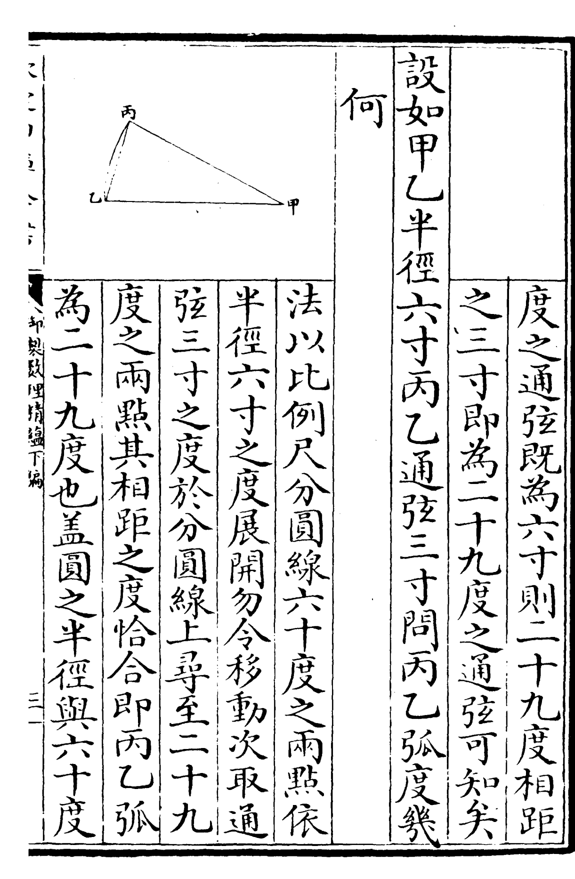
設如甲乙半徑六寸丙乙弧二十九度問丙乙通弦幾何



法以比例尺分圓線六十度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取分圓線二十九度兩點相距之度於分釐尺上量之得三寸即丙乙通弦之數也盖圓之半徑與六十度之通弦等六十

度之通弦既為六寸則二十九度相距之三寸即為二十九度之通弦可知矣

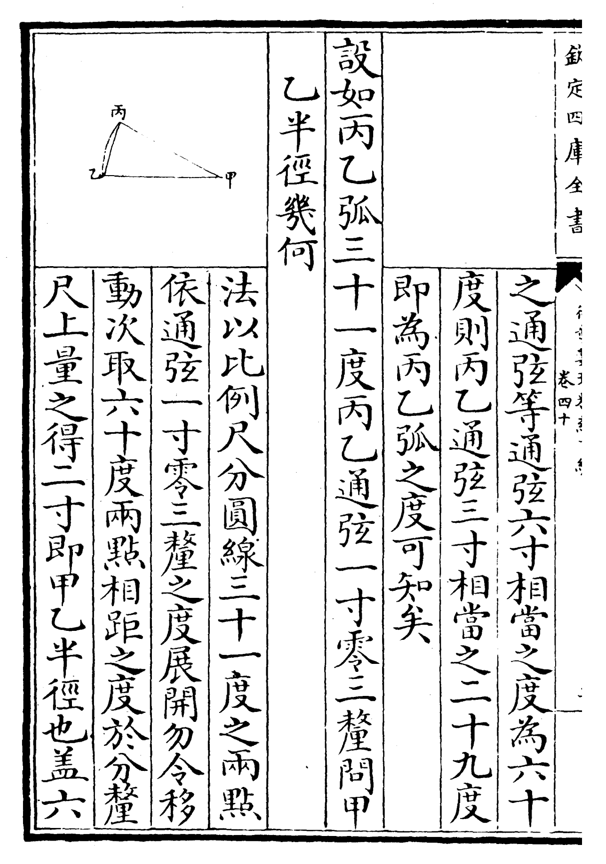
設如甲乙半徑六寸丙乙通弦三寸問丙乙弧度幾何



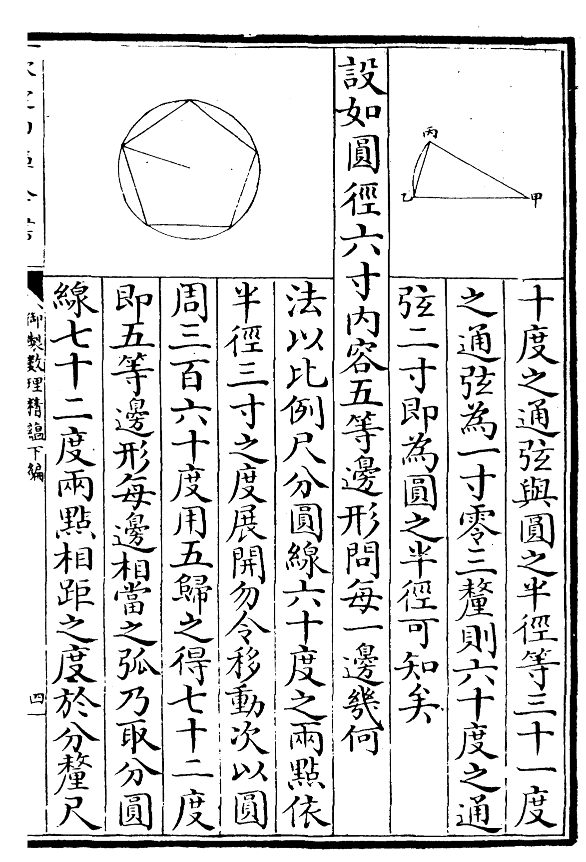
法以比例尺分圓線六十度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取通弦三寸之度於分圓線上尋至二十九度之兩點其相距之度恰合即丙乙弧為二十九度也蓋圓之半徑與六十度

之通弦等通弦六寸相當之度為六十度則丙乙通弦三寸相當之二十九度即為丙乙弧之度可知矣

設如丙乙弧三十一度丙乙通弦一寸零三釐問甲乙半徑幾何



法以比例尺分圓線三十一度之兩點依通弦一寸零三釐之度展開勿令移動次取六十度兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸即甲乙半徑也盖六

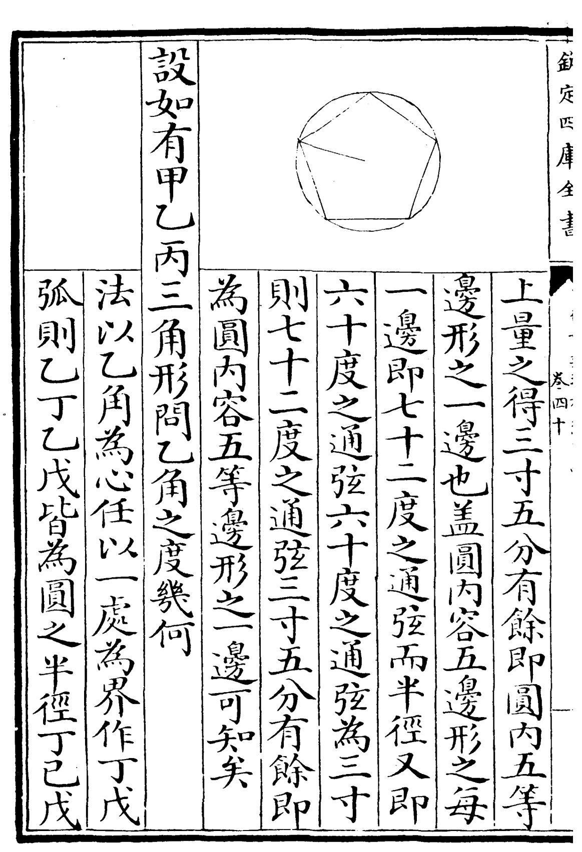


十度之通弦與圓之半徑等三十一度之通弦為一寸零二釐則六十度之通弦二寸即為圓之半徑可知矣

設如圓徑六寸內容五等邊形問每一邊幾何

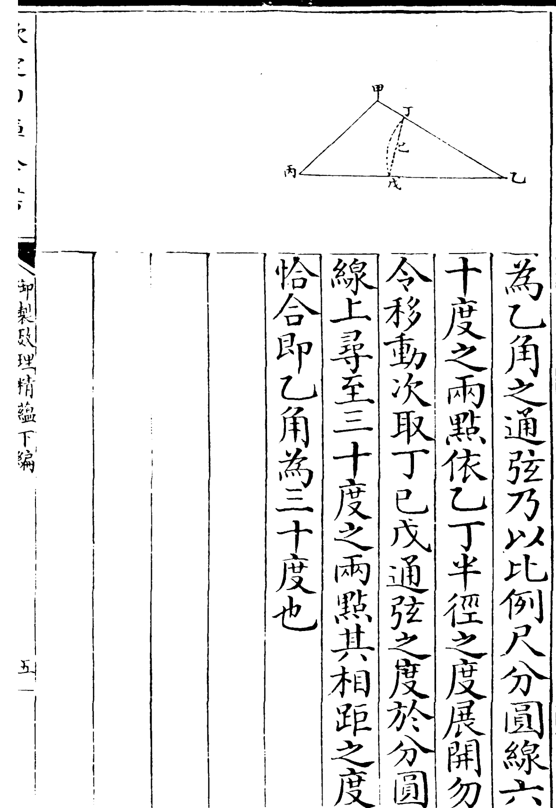
法以比例尺分圓線六十度之兩點依半徑三寸之度展開勿令移動次以圓周三百六十度用五歸之得七十二度即五等邊形每邊相當之弧乃取分圓線七十二度兩點相距之度於分釐尺

上量之得三寸五分有餘即圓内五等邊形之每一邊也盖圓内容五邊形之每一邊即七十二度之通弦而半徑又即六十度之通弦六十度之通弦為三寸則七十二度之通弦三寸五分有餘即為圓内容五等邊形之一邊可知矣



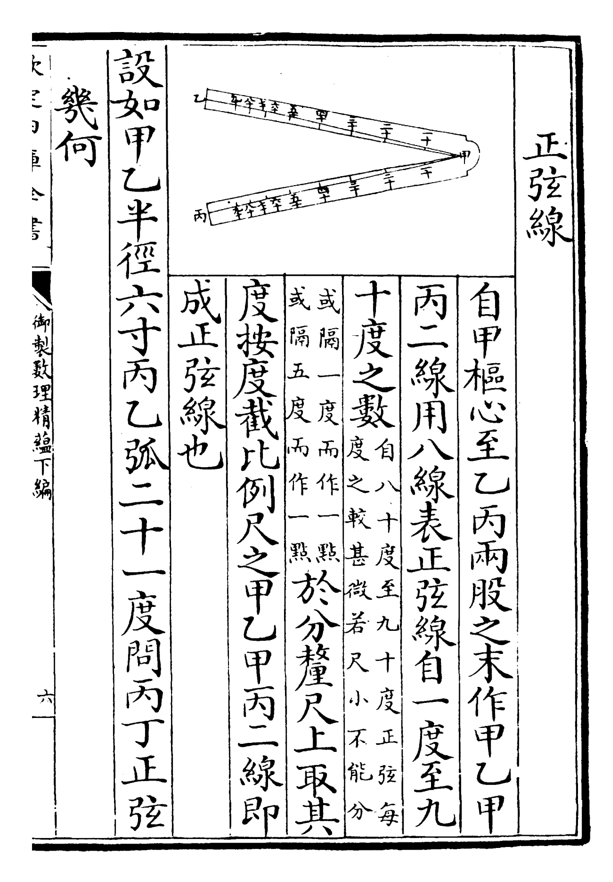
設如有甲乙丙三角形問乙角之度幾何

法以乙角為心任以一處為界作丁戊弧則乙丁乙戊皆為圓之半徑丁己戊



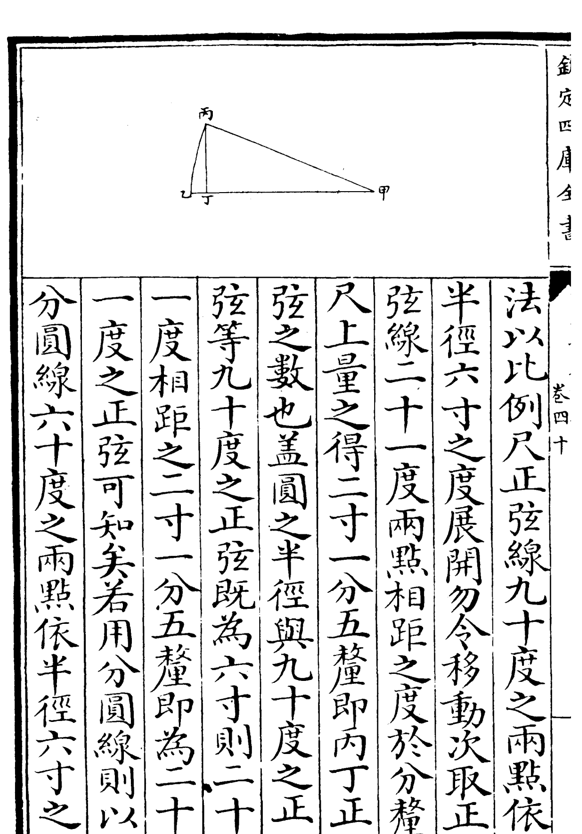
為乙角之通弦乃以比例尺分圓線六十度之兩點依乙丁半徑之度展開勿令移動次取丁已戊通弦之度於分圓線上尋至三十度之兩點其相距之度恰合即乙角為三十度也

正弦線

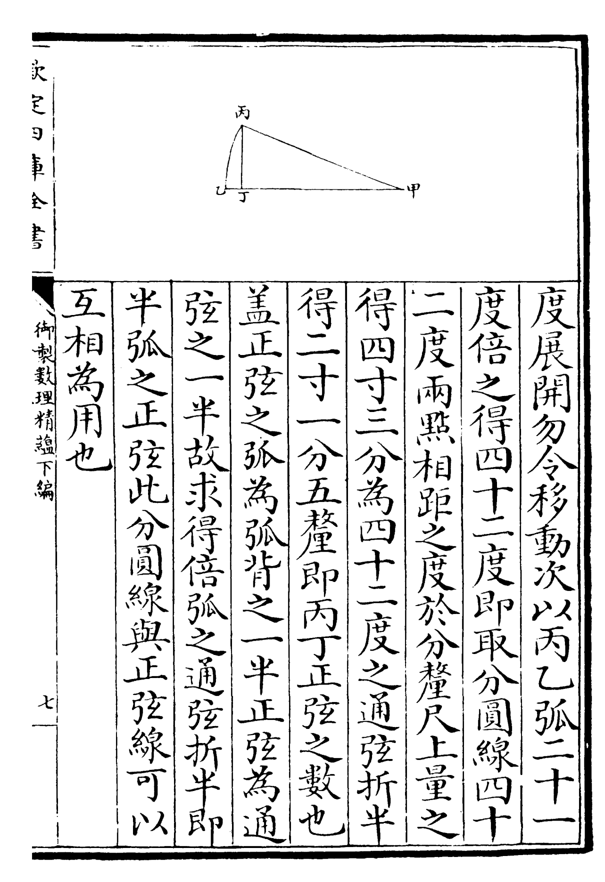


自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線用八線表正弦線自一度至九十度之數（自八十度至九十度正弦每度之較甚微若尺小不能分或隔一度兩作一點或隔五度兩作一點）於分釐尺上取其度按度截比例尺之甲乙甲丙二線即成正弦線也

設如甲乙半徑六寸丙乙弧二十一度問丙丁正弦幾何

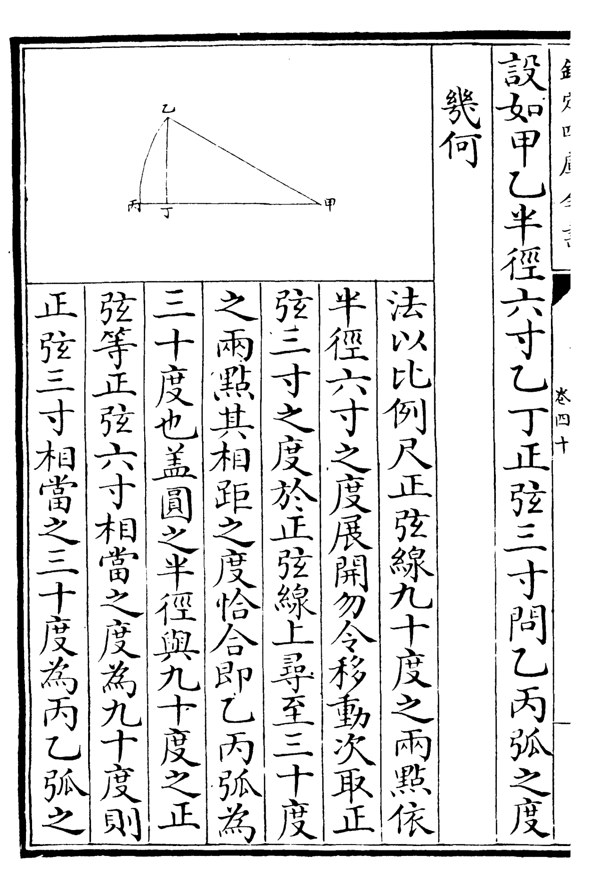


法以比例尺正弦線九十度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取正弦線二十一度兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸一分五釐即丙丁正弦之數也葢圓之半徑與九十度之正弦等九十度之正弦既為六寸則二十一度相距之二寸一分五釐即為二十一度之正弦可知矣若用分圓線則以分圓線六十度之兩點依半徑六寸之

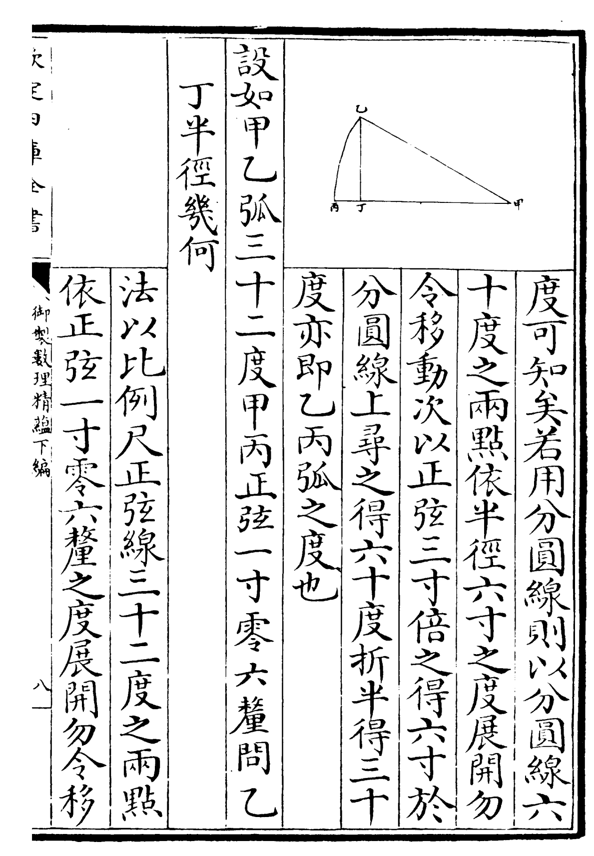


度展開勿令移動次以丙乙弧二十一度倍之得四十二度即取分圓線四十二度兩點相距之度於分釐尺上量之得四寸三分為四十二度之通弦折半得二寸一分五釐即丙丁正弦之數也蓋正弦之弧為弧背之一半正弦為通弦之一半故求得倍弧之通弦折半即半弧之正弦此分圓線與正弦線可以互相為用也

設如甲乙半徑六寸乙丁正弦三寸問乙丙弧之度幾何



法以比例尺正弦線九十度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取正弦三寸之度於正弦線上尋至三十度之兩點其相距之度恰合即乙丙弧為三十度也葢圓之半徑與九十度之正弦等正弦六寸相當之度為九十度則正弦三寸相當之三十度為丙乙弧之

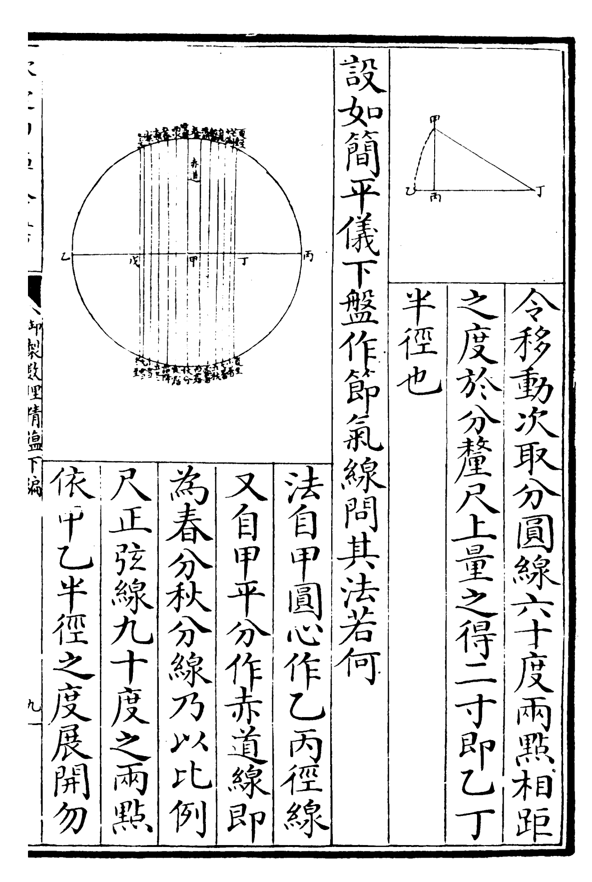


度可知矣若用分圓線則以分圓線六十度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次以正弦三寸倍之得六寸於分圓線上尋之得六十度折半得三十度亦即乙丙弧之度也

設如甲乙弧三十二度甲丙正弦一寸零六釐問乙丁半徑幾何

法以比例尺正弦線三十二度之兩點依正弦一寸零六釐之度展開勿令移

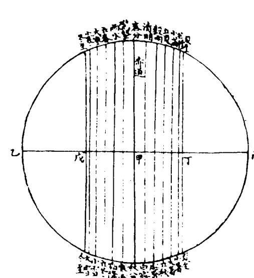
動次取九十度兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸即乙丁半徑也盖九十度之正弦與圓之半徑等三十二度之正弦為一寸零六釐則九十度之正弦二寸即為圓之半徑可知矣若用分圓線則以三十二度倍之得六十四度以正弦一寸零六釐倍之得通弦二寸一分二釐乃以分圓線六十四度之兩點依通弦二寸一分二釐之度展開分



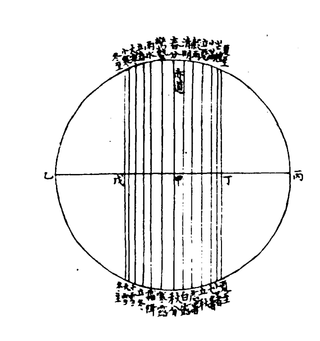
令移動次取分圓線六十度兩點相距之度於分釐尺上量之得二寸即乙丁半徑也

設如簡平儀下盤作節氣線問其法若何

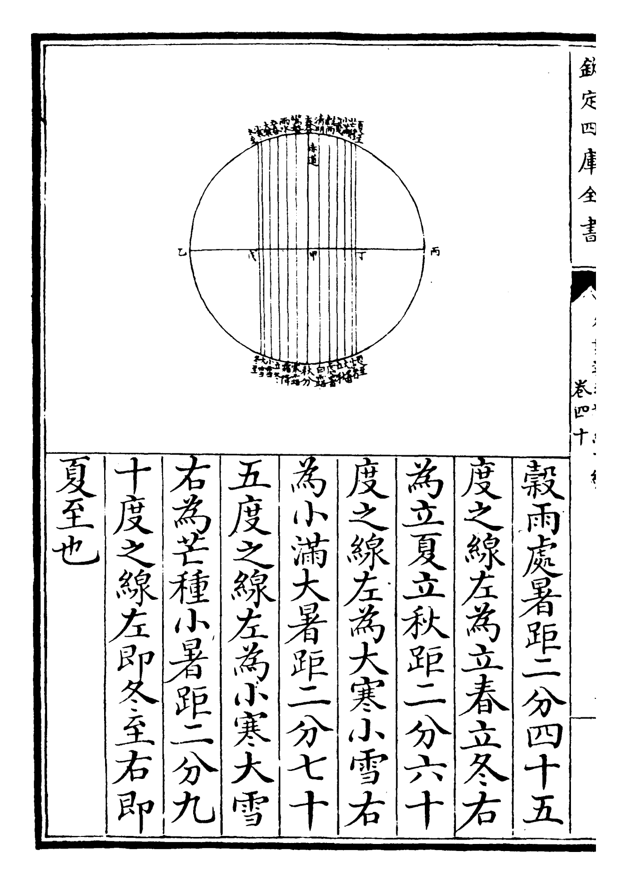
法自甲圓心作乙丙徑線又自甲平分作赤道線即為春分秋分線乃以比例尺正弦線九十度之兩點依甲乙半徑之度展開勿



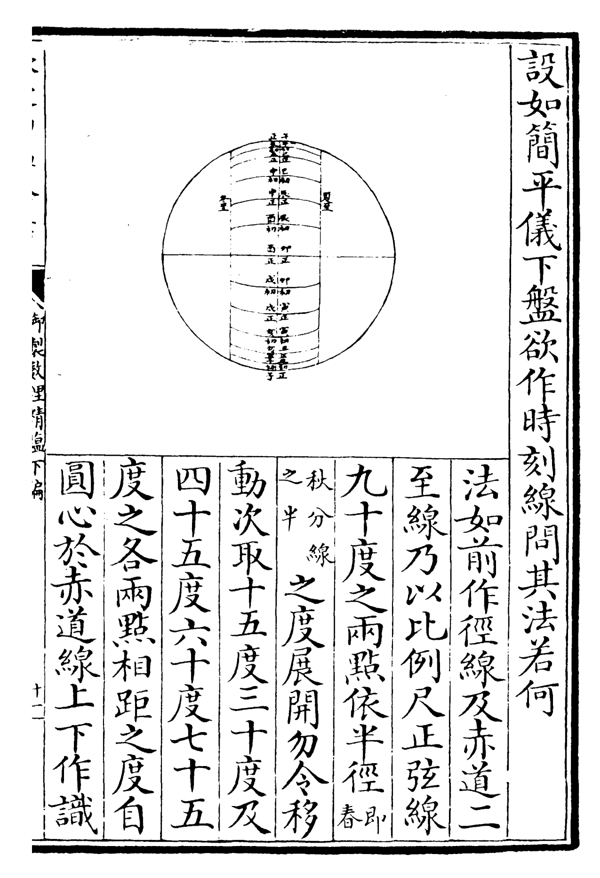
令移動次取二十三度半兩點相距之度二至黄赤道大距度於赤道線左右丙乙徑上作識如丁戊依識與赤道平行作線即為夏至冬至線丁為夏至戊為冬至復以正弦線九十度之兩點依甲戊二十三度半之正弦線度展開勿令移動而取十五度



三十度四十五度六十度七十五度之各兩點相距之度於赤道左右作識悉與赤道平行作線即成二十四節氣線也蓋赤道即春分秋分距二分十五度之線左為驚蟄寒露右為清明白露距二分三十度之線左為雨水霜降右為



穀雨處暑距二分四十五度之線左為立春立冬右為立夏立秋距二分六十度之線左為大寒小雪右為小滿大暑距二分七十五度之線左為小寒大雪右為芒種小暑距二分九十度之線左即冬至右即夏至也

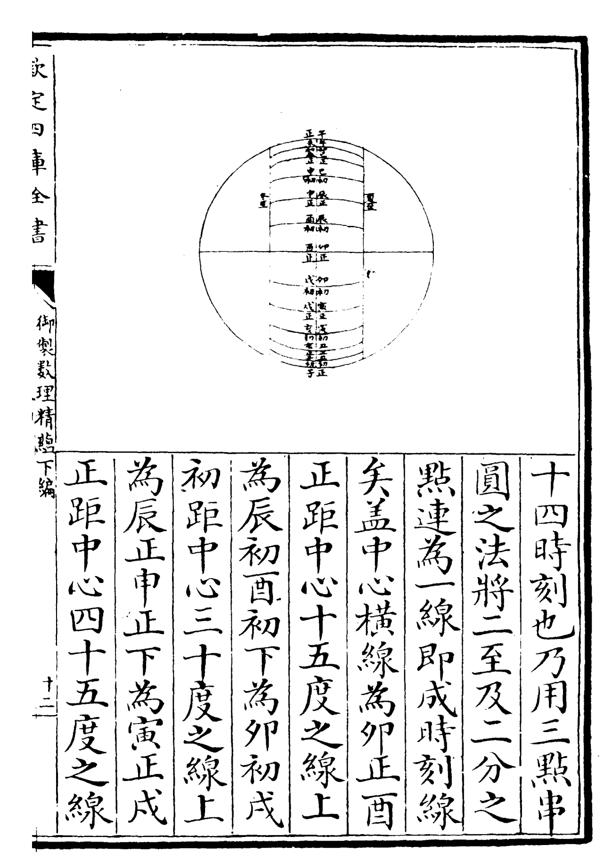


設如簡平儀下盤欲作時刻線問其法若何

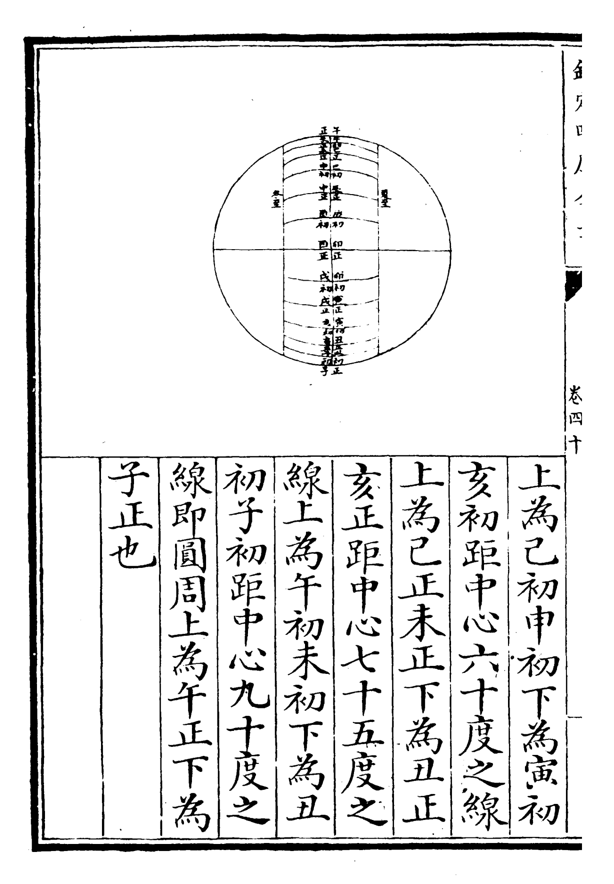
法如前作徑線及赤道二至線乃以比例尺正弦線九十度之兩點依半徑即春秋分線之半之度展開勿令移動次取十五度三十度及四十五度六十度七十五度之各兩點相距之度自圓心於赤道線上下作識



即春秋分時之二十四時刻也又以比例尺正弦線九十度之兩點依冬夏至線之半展開勿令移動取十五度三十度四十五度六十度七十五度之各兩點相距之度自圓徑與二至線相交之處於二至線上下作識即二至時之二



十四時刻也乃用三點串圓之法將二至及二分之點連為一線即成時刻線矣蓋中心橫線為卯正酉正距中心十五度之線上為辰初酉初下為卯初戌初距中心三十度之線上為辰正申正下為寅正戌正距中心四十五度之線



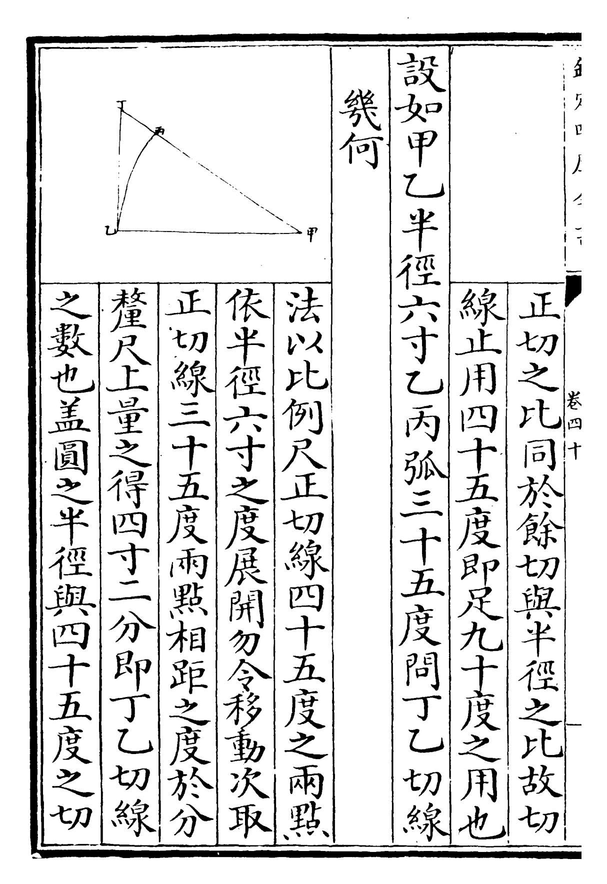
上為巳初申初下為寅初亥初距中心六十度之線上為巳正未正下為丑正亥正距中心七十五度之線上為午初未初下為丑初子初距中心九十度之線即圓周上為午正下為子正也

正切線

自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線用八線表正切線自一度至四十五度之數於分釐尺上取其度按度截比例尺之甲乙甲丙二線即成正切線也至於四十五度以後則與四十五度以前相為正餘蓋四十五度之正切線與半徑等四十五度以前之正切線即四十五度以後之餘切線而半徑與

正切之比同於餘切與半徑之比故切線止用四十五度即足九十度之用也

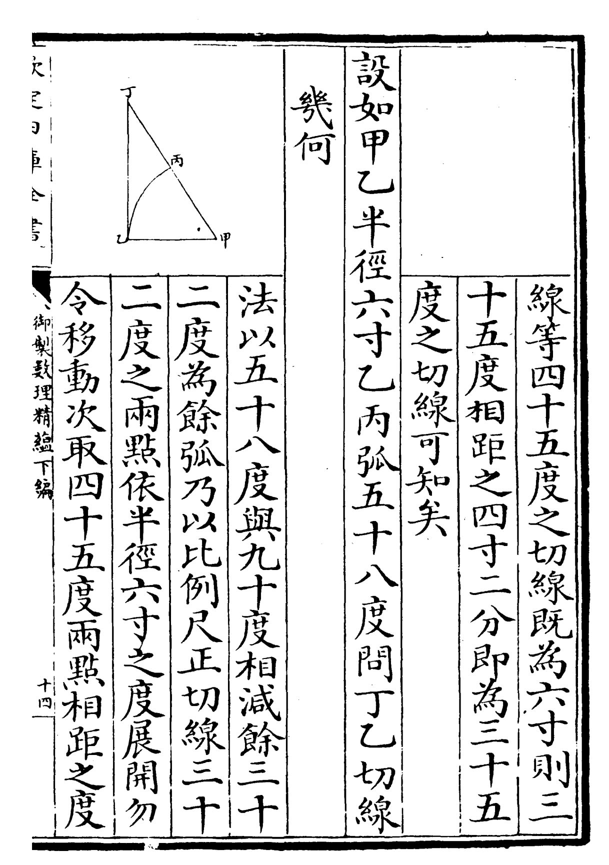
設如甲乙半徑六寸乙丙弧三十五度問丁乙切線幾何



法以比例尺正切線四十五度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取正切線三十五度兩點相距之度於分釐尺上量之得四寸二分即丁乙切線之數也盖圓之半徑與四十五度之切

線等四十五度之切線既為六寸則三十五度相距之四寸二分即為三十五度之切線可知矣

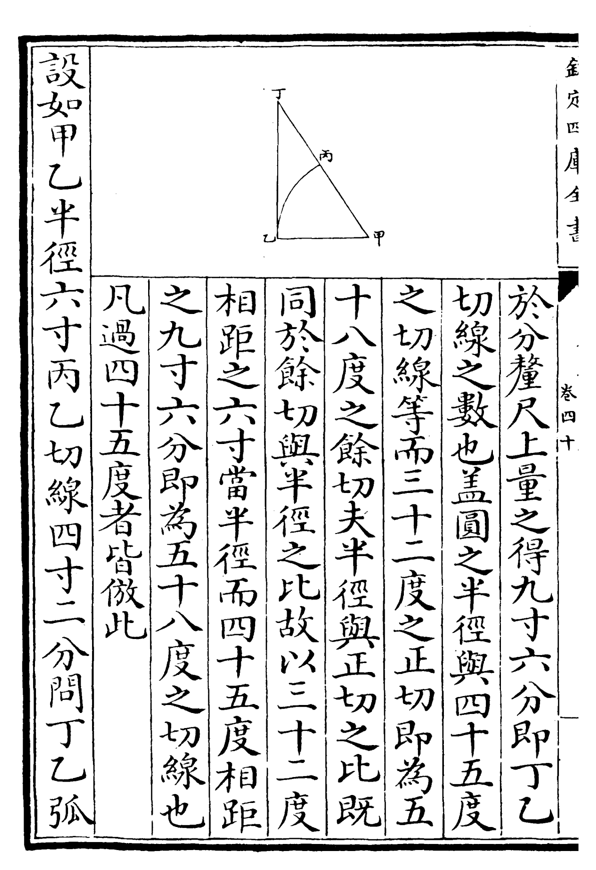
設如甲乙半徑六寸乙丙弧五十八度問丁乙切線幾何



法以五十八度與九十度相減餘三十二度為餘弧乃以比例尺正切線三十二度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取四十五度兩點相距之度

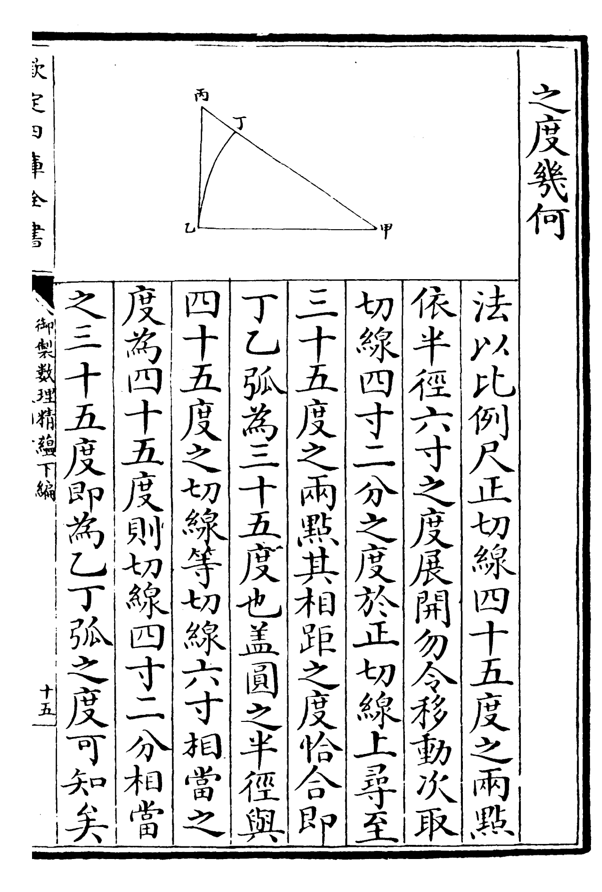
於分釐尺上量之得九寸六分即丁乙切線之數也蓋圓之半徑與四十五度之切線等而三十二度之正切即為五十八度之餘切夫半徑與正切之比既同於餘切與半徑之比故以三十二度相距之六寸當半徑而四十五度相距之九寸六分即為五十八度之切線也

凡過四十五度者皆做此



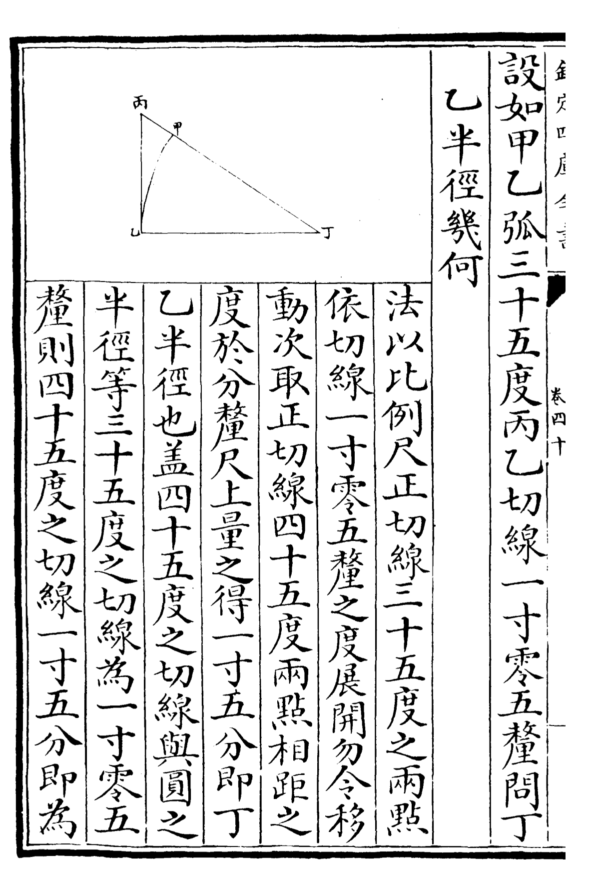
設如甲乙半徑六寸丙乙切線四寸二分問丁乙弧

之度幾何



法以比例尺正切線四十五度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取切線四寸二分之度於正切線上尋至三十五度之兩點其相距之度恰合即丁乙弧為三十五度也蓋圓之半徑與四十五度之切線等切線六寸相當之度為四十五度則切線四寸二分相當之三十五度即為乙丁弧之度可知矣

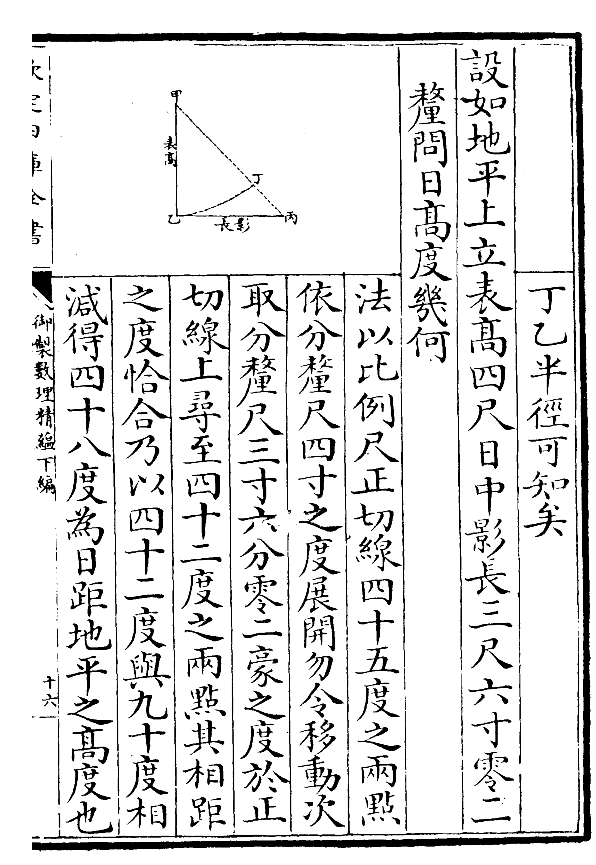
設如甲乙弧三十五度丙乙切線一寸零五釐問丁乙半徑幾何



法以比例尺正切線三十五度之兩點依切線一寸零五釐之度展開勿令移動次取正切線四十五度兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸五分即丁乙半徑也盖四十五度之切線與圓之半徑等三十五度之切線為一寸零五釐則四十五度之切線一寸五分即為

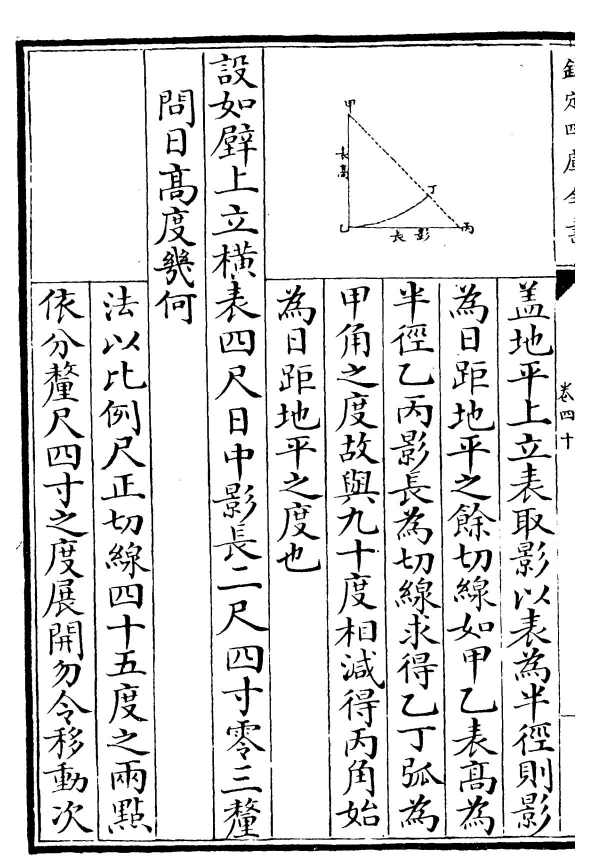
丁乙半徑可知矣

設如地平上立表高四尺日中影長三尺六寸零二釐問日高度幾何



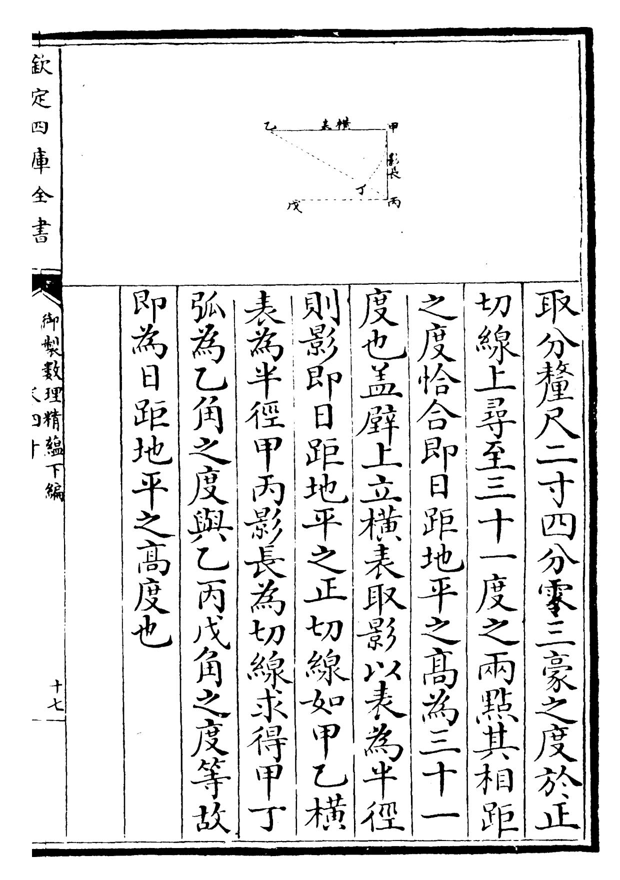
法以比例尺正切線四十五度之兩點依分釐尺四寸之度展開勿令移動次取分釐尺三寸六分零二毫之度於正切線上尋至四十二度之兩點其相距之度恰合乃以四十二度與九十度相減得四十八度為日距地平之高度也

蓋地平上立表取影以表為半徑則影為日距地平之餘切線如甲乙表高為半徑乙丙影長為切線求得乙丁弧為甲角之度故與九十度相減得丙角始為日距地平之度也

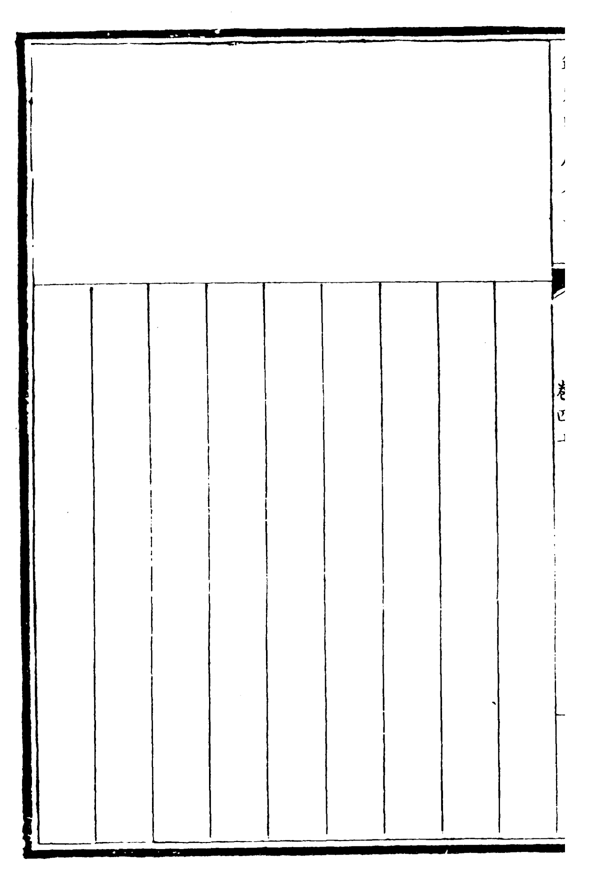


設如壁上立橫表四尺日中影長二尺四寸零三釐問日高度幾何

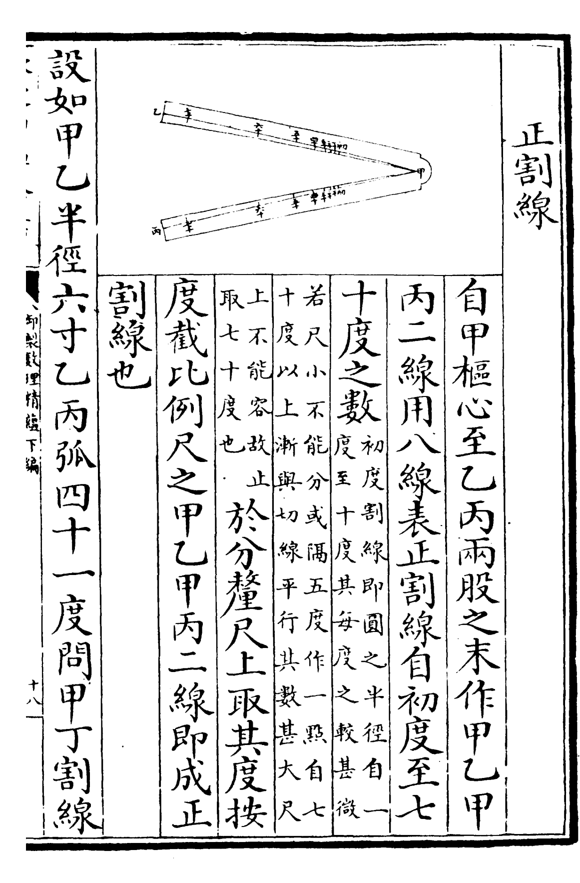
法以比例尺正切線四十五度之兩點依分釐尺四寸之度展開勿令移動次



取分釐尺二寸四分零三豪之度於正切線上尋至三十一度之兩點其相距之度恰合即日距地平之高為三十一度也蓋辟上立橫表取影以表為半徑則影即日距地平之正切線如甲乙橫表為半徑甲丙影長為切線求得甲丁弧為乙角之度與乙丙戊角之度等故即為日距地平之高度也



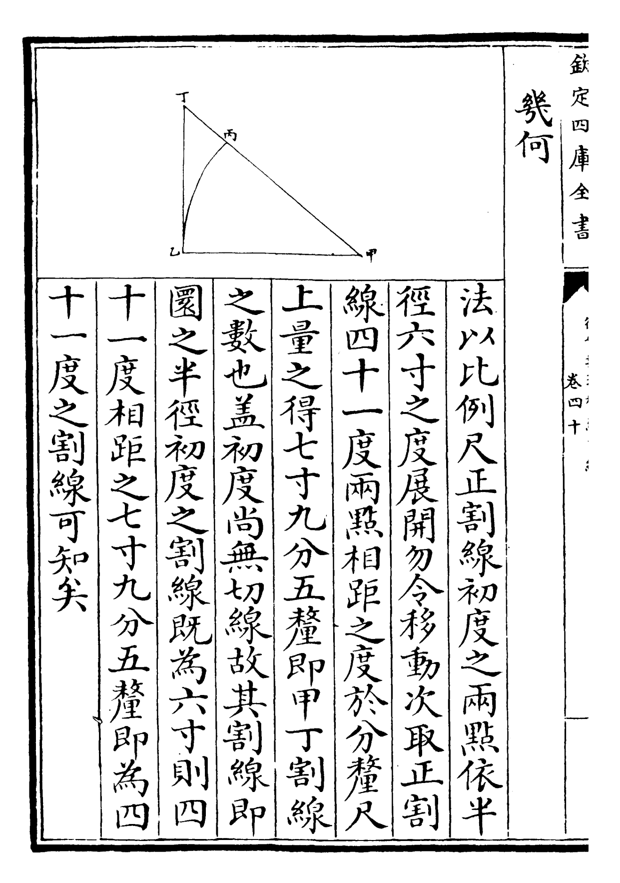
正割線



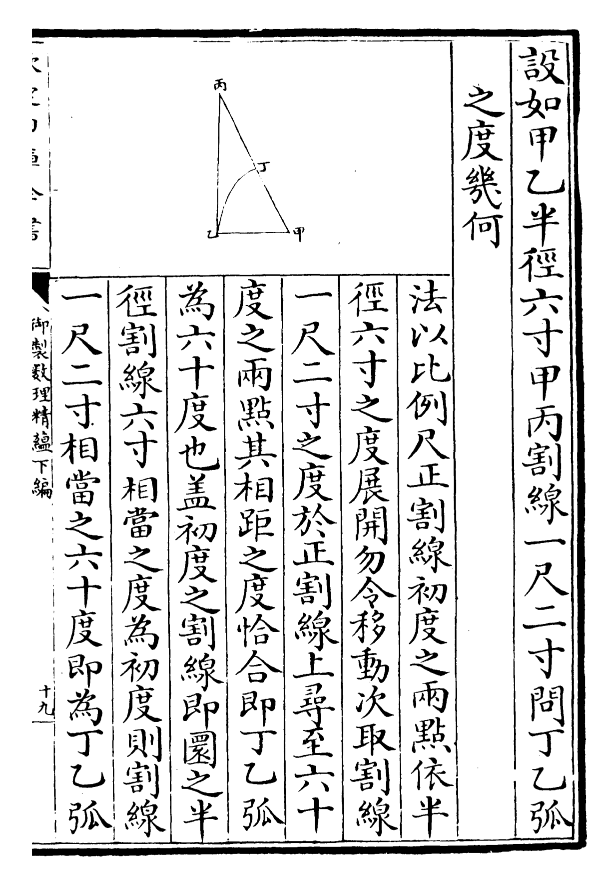
自甲樞心至乙丙兩股之末作甲乙甲丙二線用八線表正割線自初度至七十度之數初度割線即圓之半徑自一度至十度其每度之較甚微若尺小不能分或隔五度作一點自七十度以上漸與切線平行其數甚大尺上不能容故止取七十度也於分釐尺上取其度按度截比例尺之甲乙甲丙二線即成正割線也

設如甲乙半徑六寸乙丙弧四十一度問甲丁割線

幾何



法以比例尺正割線初度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取正割線四十一度兩點相距之度於分釐尺上量之得七寸九分五釐即甲丁割線之數也葢初度尚無切線故其割線即圜之半徑初度之割線既為六寸則四十一度相距之七寸九分五釐即為四十一度之割線可知矣

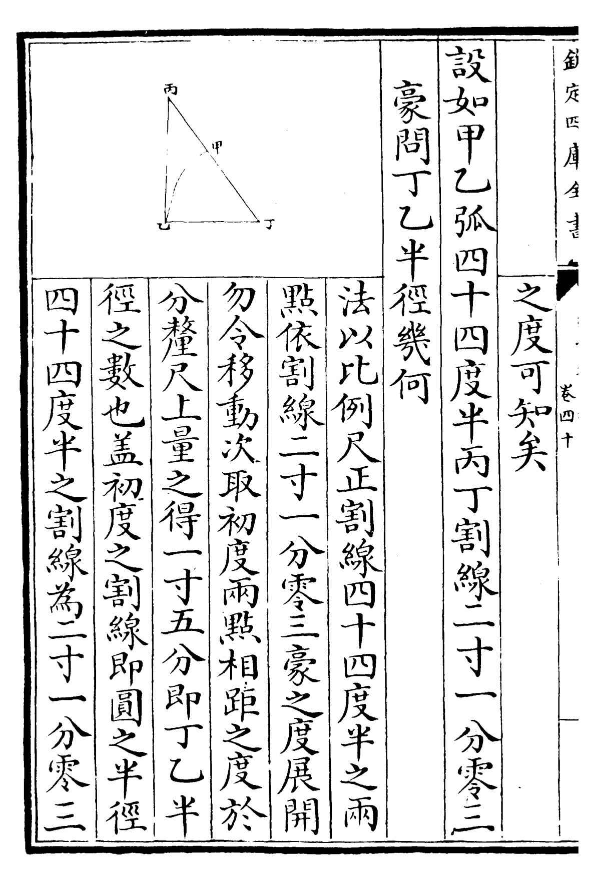


設如甲乙半徑六寸甲丙割線一尺二寸問丁乙弧之度幾何

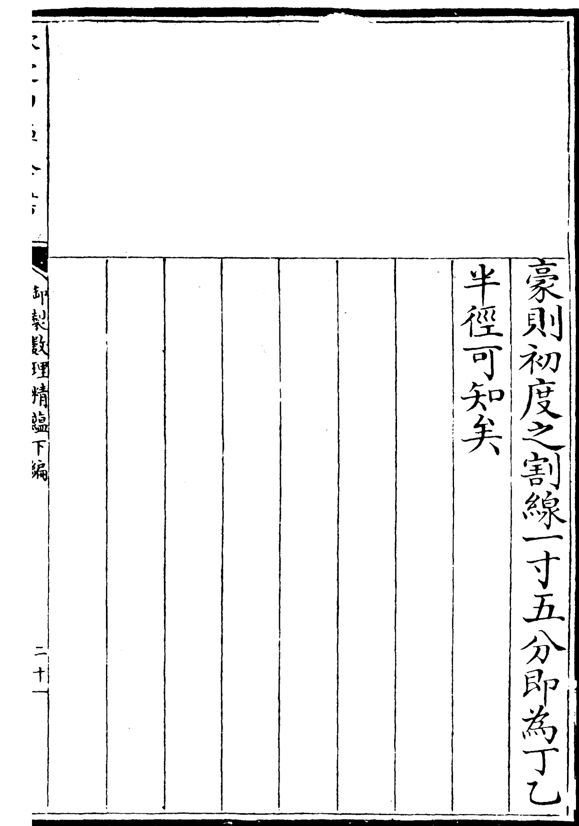
法以比例尺正割線初度之兩點依半徑六寸之度展開勿令移動次取割線一尺二寸之度於正割線上尋至六十度之兩點其相距之度恰合即丁乙弧為六十度也盖初度之割線即圜之半徑割線六寸相當之度為初度則割線一尺二寸相當之六十度即為丁乙弧

之度可知矣

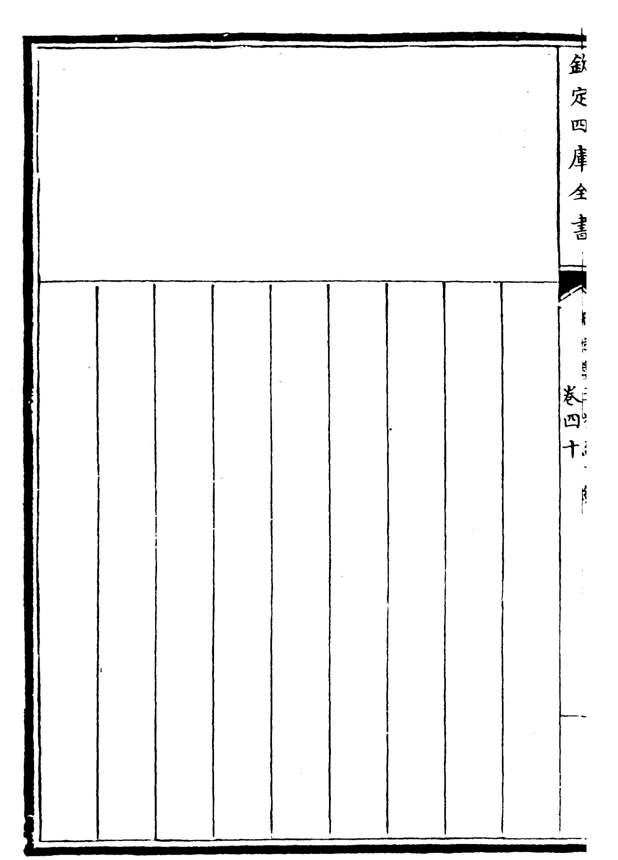
設如甲乙弧四十四度半丙丁割線二寸一分零三豪問丁乙半徑幾何

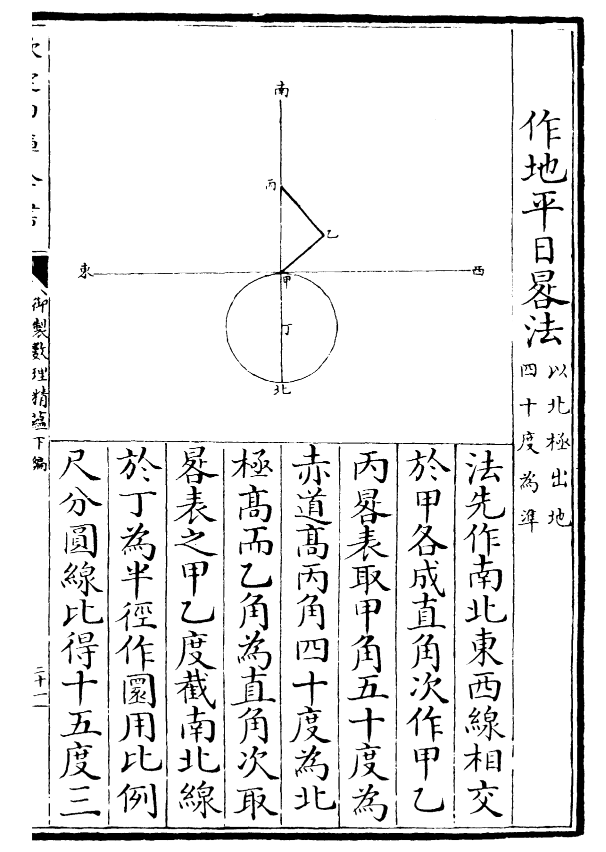


法以比例尺正割線四十四度半之兩點依割線二寸一分零三豪之度展開勿令移動次取初度兩點相距之度於分釐尺上量之得一寸五分即丁乙半徑之數也蓋初度之割線即圓之半徑四十四度半之割線為二寸一分零三



豪則初度之割線一寸五分即為丁乙半徑可知矣

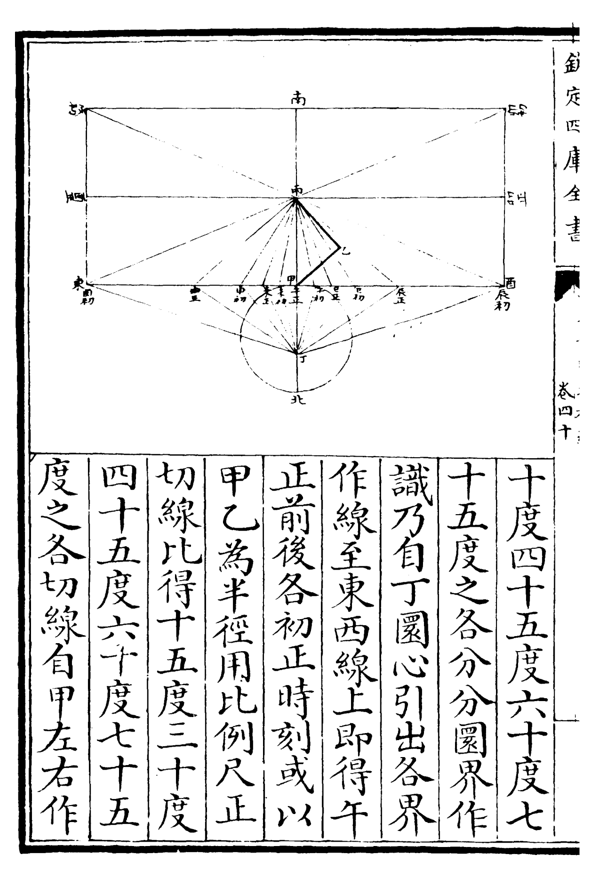

欽定四庫全書
卷四十



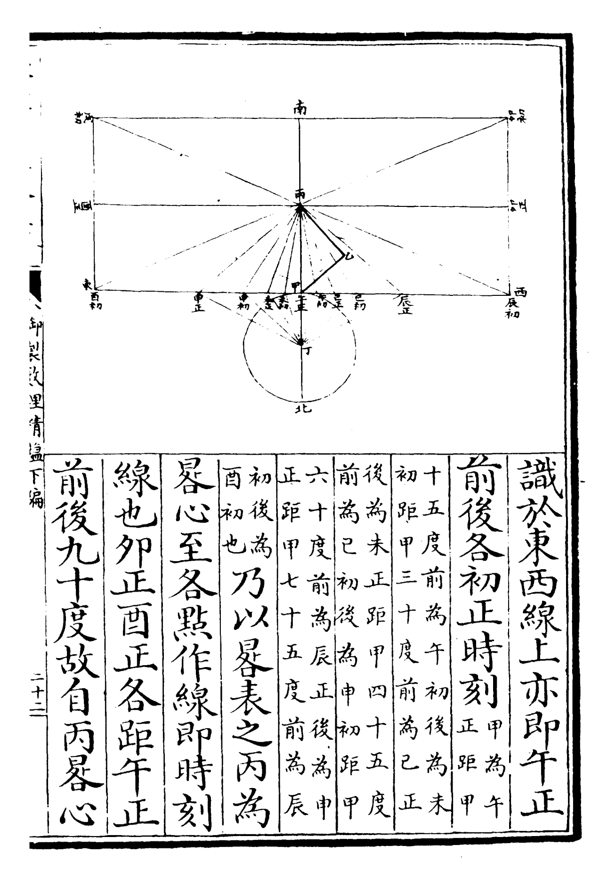
作地平日晷法

以北極出地四十度為準

法先作南北東西線相交於甲各成直角次作甲乙丙晷表取甲角五十度為赤道高丙角四十度為北極高丙乙角為直角次取晷表之甲乙度截南北線於丁為半徑作圜用比例尺分圓線比得十五度三

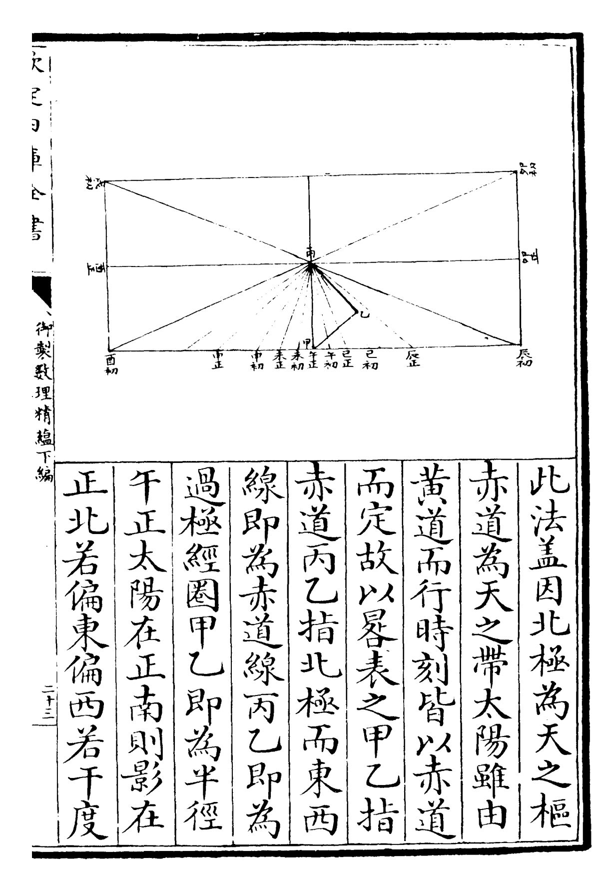


十度四十五度六十度七十五度之各分分圜界作識乃自丁圜心引出各界作線至東西線上即得午正前後各初正時刻或以甲乙為半徑用比例尺正切線比得十五度三十度四十五度六十度七十五度之各切線自甲左右作

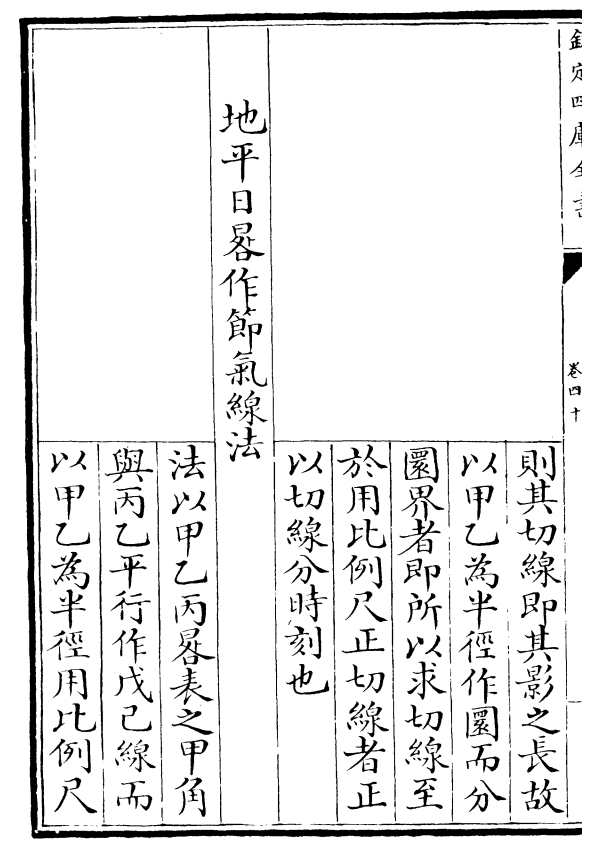


識於東西線上亦即午正前後各初正時刻甲為午正距甲十五度前為午初後為未初距甲三十度前為巳正後為未正距甲四十五度前為巳初後為申初距甲六十度前為辰正後為申正距甲七十五度前為辰初後為酉初也乃以晷表之丙為晷心至各點作線即時刻線也夘正酉正各距午正前後九十度故自丙晷心

與東西線平行作線即夘正酉正線夘正以前酉正以後則日轉在北影轉在南故與辰初酉初反對作線即夘初戌初線也次按刻細分則自午正甲點每加三度四十五分而得一刻盖十五度當四刻而三度四十五分則當一刻也



此法蓋因北極為天之樞赤道為天之帶太陽雖由黃道而行時刻皆以赤道而定故以晷表之甲乙指赤道丙乙指北極而東西線即為赤道線丙乙即為過極經圈甲乙即為半徑午正太陽在正南則影在正北若偏東偏西若干度

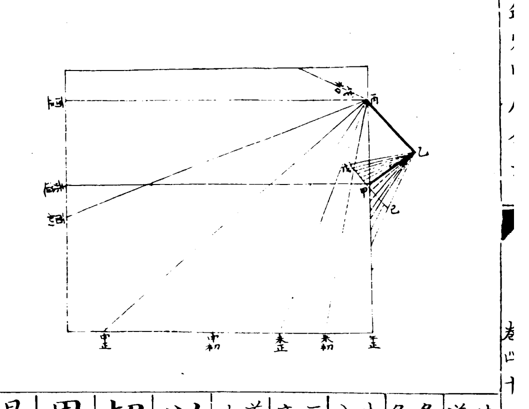


則其切線即其影之長故以甲乙為半徑作圜而分圜界者即所以求切線至於用比例尺正切線者正以切線分時刻也

地平日晷作節氣線法

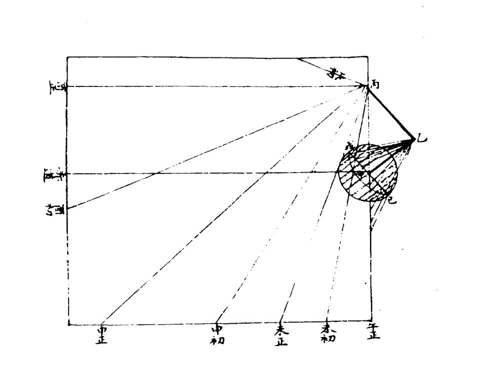
法以甲乙丙晷表之甲角與丙乙平行作戊己線而以甲乙為半徑用比例尺

正切線比得二十三度三十分二十二度四十分二十度十二分十六度二十三分十一度三十分五度五十五分之各切線自甲左右作識於戊己線上即得各節氣日影界春秋分為赤道冬至距赤道南夏至距赤道北各二十三度三十分小寒大雪距赤道南芒種小暑距赤道北各二十二

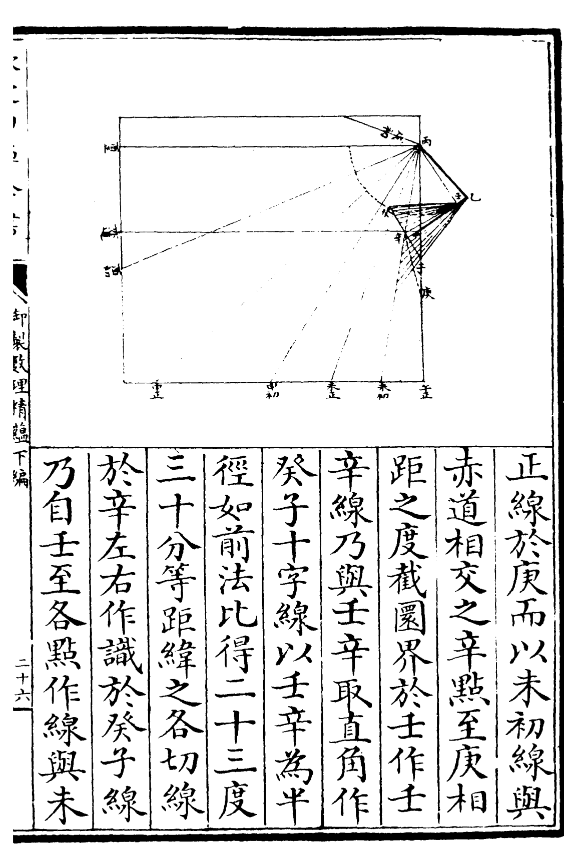


度四十分大寒小雪距赤道南小滿大暑距赤道北各二十度十二分立春立冬距赤道南立夏立秋距赤道北各十六度二十三分雨水霜降距赤道南穀雨處暑距赤道北各十一度三十分驚蟄寒露距赤道南清明白露距赤道北各五度五十五分或以二十三度三十分之正切線甲戊為半徑作圜將甲乙線引長平分為四象限用比例尺分圓線比得

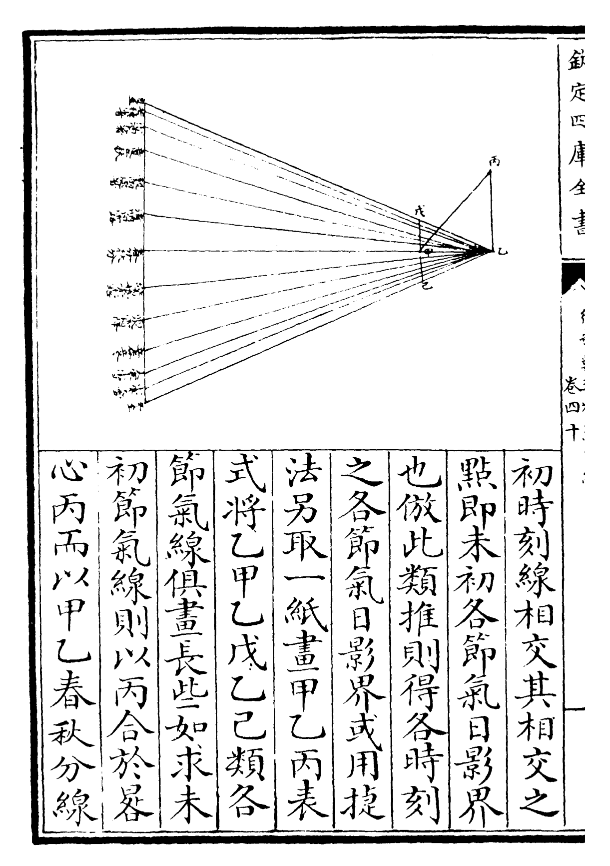
十五度三十度四十五度六十度七十五度之各圜界又以乙戊為半徑作戊己弧而依所分甲戊小圜界各與甲乙平行作線截戊己弧界又自乙至戊己各弧界作線截戊甲己線亦即得各節氣日影界甲為春秋分距甲十五度左為驚蟄寒露右為清明白露



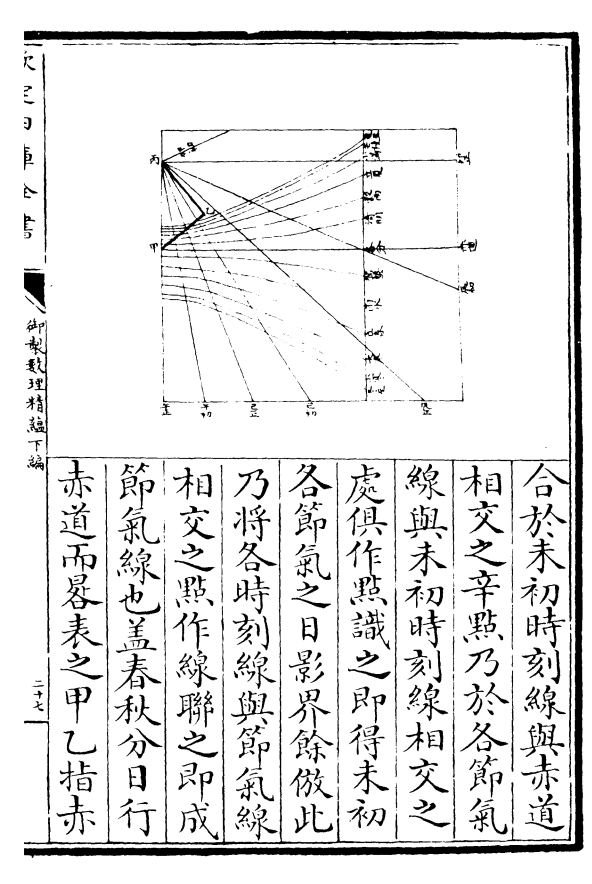
距甲三十度左為雨水霜降右為穀雨處暑距甲四十五度左為立春立冬右為立夏立秋距甲六十度左為大寒小雪右為小滿大暑距甲七十五度左為小寒大雪右為芒種小暑乃自乙至各點作線與午正時刻線相交其相交之點即午正各節氣日影界也若求未初節氣線則先以丙乙為半徑作圜又依甲乙度截午



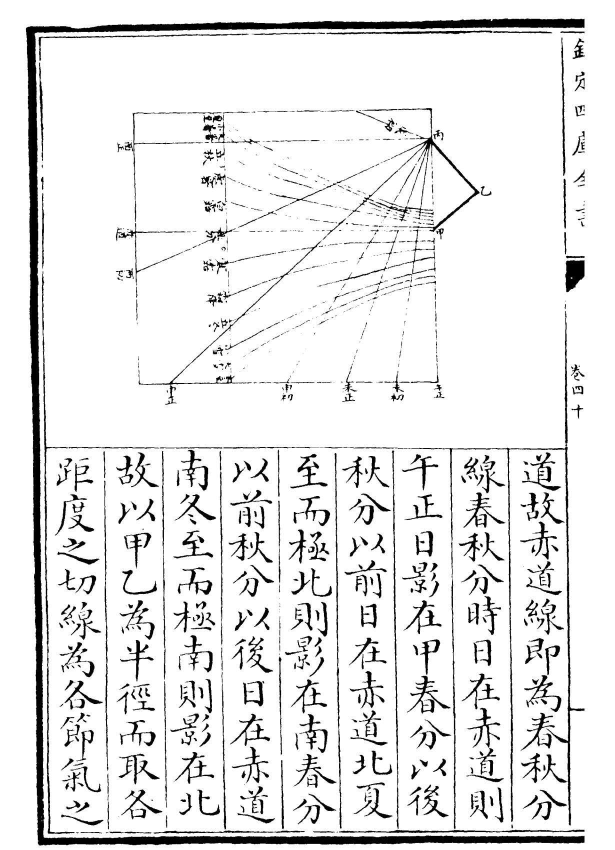
正線於庚而以未初線與赤道相交之辛點至庚相距之度截圜界於壬作壬辛線乃與壬辛取直角作癸子十字線以壬辛為半徑如前法比得二十三度三十分等距緯之各切線於辛左右作識於癸子線乃自壬至各點作線與未



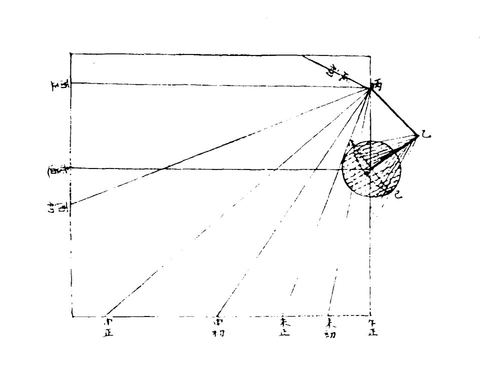
初時刻線相交其相交之點即未初各節氣日影界也倣此類推則得各時刻之各節氣日影界或用捷法另取一紙畫甲乙丙表式將乙甲乙戊乙己類各節氣線俱畫長些如求未初節氣線則以丙合於晷心丙而以甲乙春秋分線



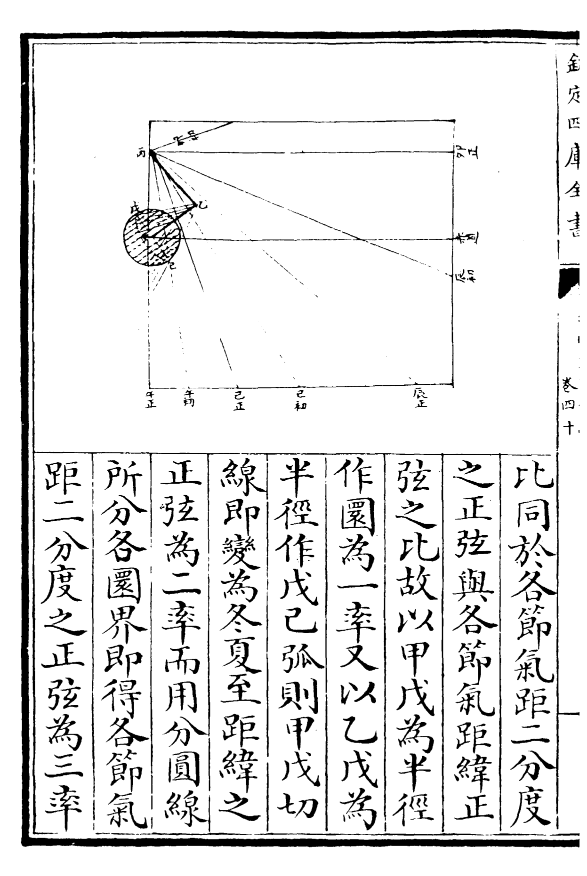
合於未初時刻線與赤道相交之辛點乃於各節氣線與未初時刻線相交之處俱作點識之即得未初各節氣之日影界餘倣此乃將各時刻線與節氣線相交之點作線聯之即成節氣線也蓋春秋分日行赤道而晷表之甲乙指赤



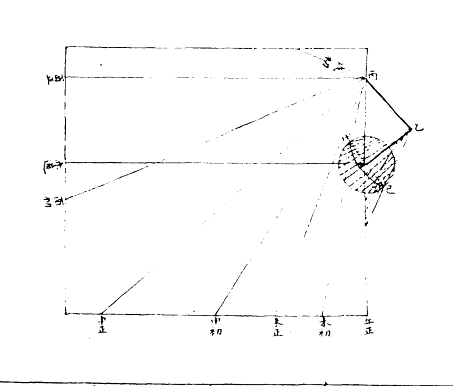
道故赤道線即為春秋分線春秋分時日在赤道則午正日影在甲春分以後秋分以前日在赤道北夏至而極北則影在南春分以前秋分以後日在赤道南冬至而極南則影在北故以甲乙為半徑而取各距度之切線為各節氣之



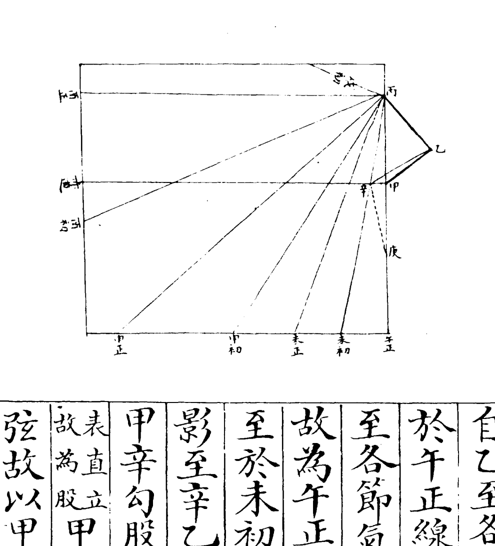
影界且切線與半徑成直角故先與甲乙取直角作十字線而後得其切線也甲乙本直立之線與之取直角則戊端應在晷面下己端應在空中出晷面上而其距午正線之遠近與平面斜線之度同蓋平與立之理一也其以冬夏至之影界為半徑作圜用分圓線求之者蓋半徑與冬夏至距緯正弦之



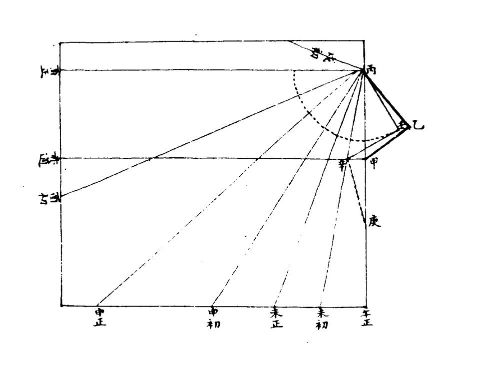
比同於各節氣距二分度之正弦與各節氣距緯正弦之比故以甲戊為半徑作圜為一率又以乙戊為半徑作戊己弧則甲戊切線即變為冬夏至距緯之正弦為二率而用分圓線所分各圜界即得各節氣距二分度之正弦為三率



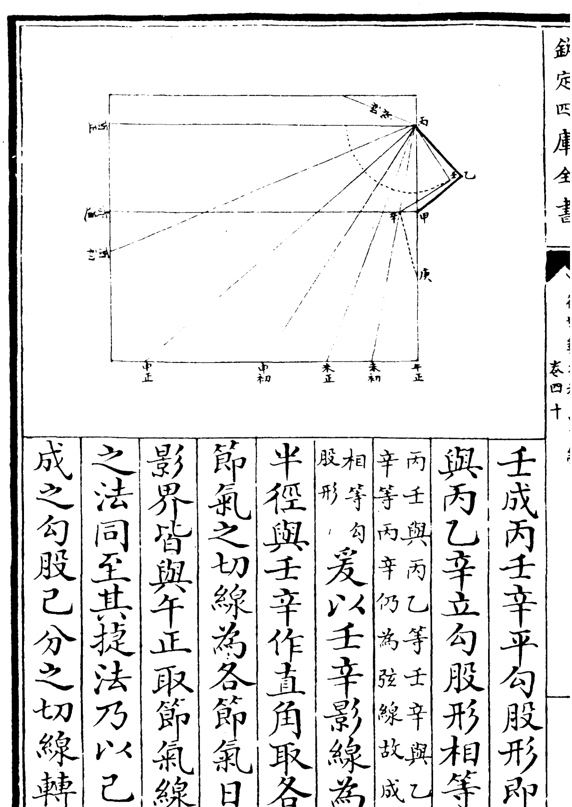
其自圜界作線截戊己弧即得各節氣距緯之正弦為四率既得各節氣之距緯度又自乙至各弧界作線截戊甲己線則戊甲己線仍為各節氣距緯之切線故用正弦即如用切線也然雖得各節氣之影界而猶不在午正線之上故



自乙至各節氣點作線交於午正線乃自乙表端照至各節氣點所必經之處故為午正節氣日影界也至於未初春秋分時則日影至辛乙辛為影線成乙甲辛勾股形甲乙為股（甲乙表直立故為股）甲辛為勾乙辛為弦故以甲乙度截午正線



於庚而取庚辛之度即與乙辛影線之度等又乙辛線與丙乙為直角成丙乙辛立勾股形丙乙為勾乙辛影線為股丙辛時刻線為弦蓋丙乙為過極經圈乙辛為赤道影線經圈與赤道無在而非直角故乙辛與影線亦無在而非直角也故以丙乙為半徑作圜而取庚辛度截圜界於



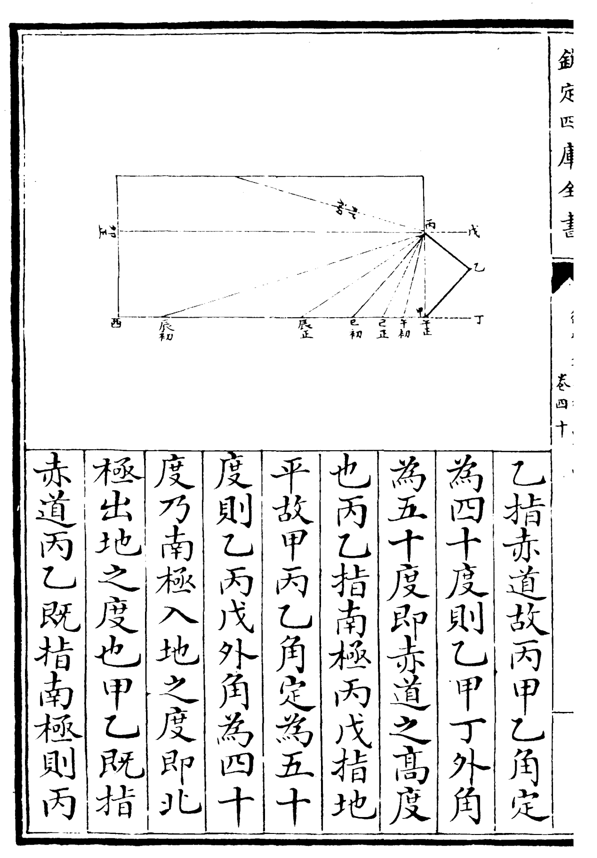
壬戌丙壬辛平勾股形即與丙乙辛立勾股形相等丙壬與丙乙等壬辛與乙辛等丙辛仍為弦線故成相等勾股形爰以壬辛影線為半徑與壬辛作直角取各節氣之切線為各節氣日影界皆與午正取節氣線之法同至其捷法乃以己成之勾股己分之切線轉

移用之尤為便捷也

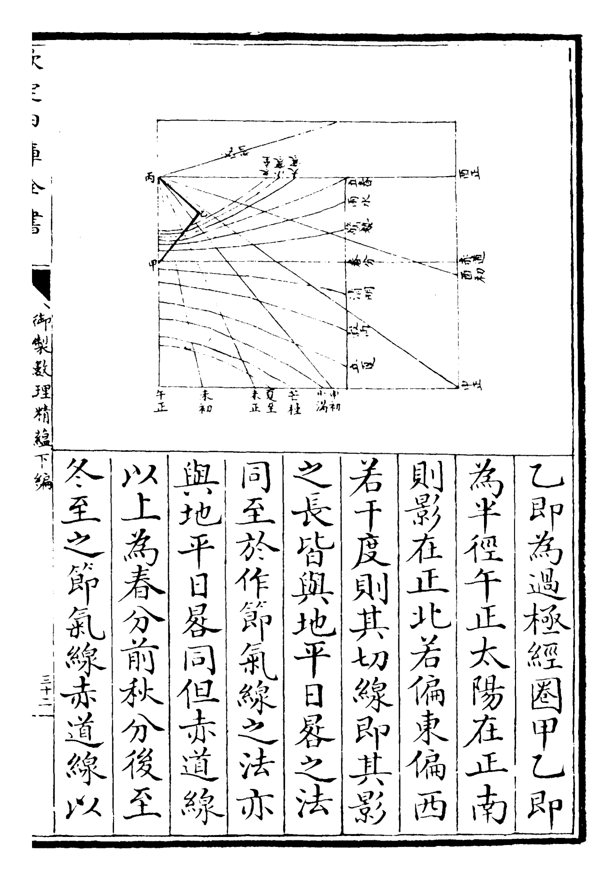
向南壁上畫立面日晷法以北極出地四十度為準

法先作直線及東西橫線相交於甲各成直角次作甲乙丙晷表取甲角四十度丙角五十度而乙為直角乃依地平日晷作時刻線法求之即得各時刻線蓋晷表之甲丙指天頂甲

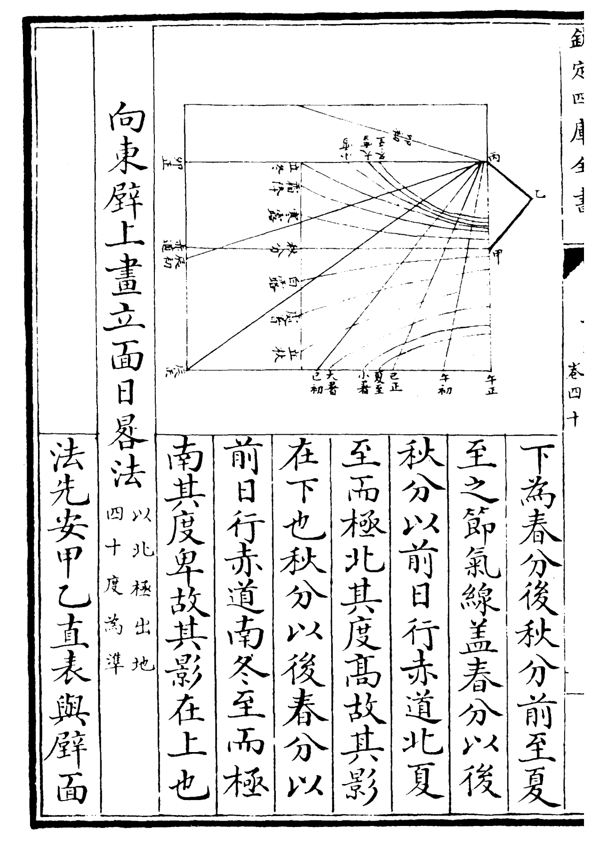
丙
乙
甲
午正
未初
未正
申初
申正
酉初
東
西
辰巳



乙指赤道故丙甲乙角定為四十度則乙甲丁外角為五十度即赤道之高度也丙乙指南極丙戊指地平故甲丙乙角定為五十度則乙丙戊外角為四十度乃南極入地之度即北極出地之度也甲乙既指赤道丙乙既指南極則丙



乙即為過極經圈甲乙即為半徑午正太陽在正南則影在正北若偏東偏西若干度則其切線即其影之長皆與地平日晷之法同至於作節氣線之法亦與地平日晷同但赤道線以上為春分前秋分後至冬至之節氣線赤道線以

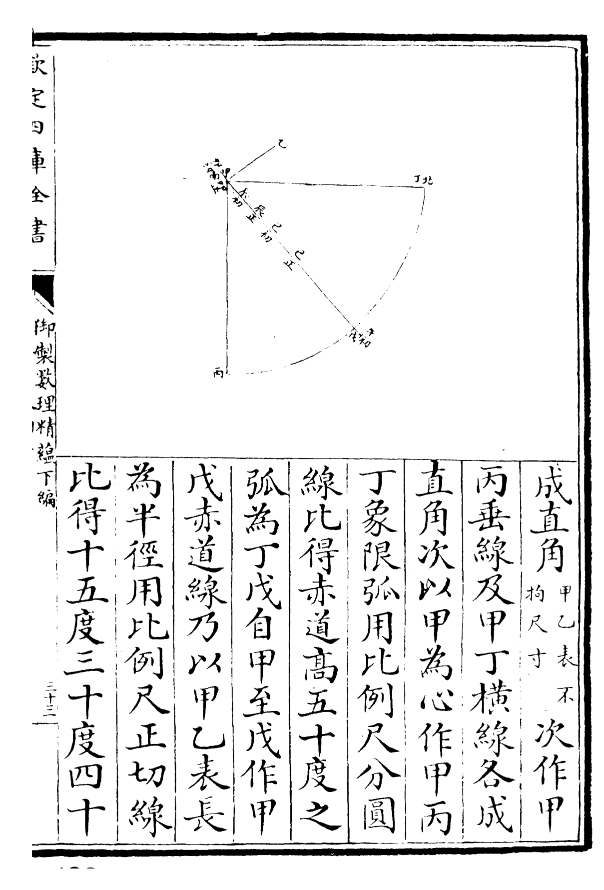


下為春分後秋分前至夏至之節氣線蓋春分以後秋分以前日行赤道北夏至而極北其度高故其影在下也秋分以後春分以前日行赤道南冬至而極南其度卑故其影在上也

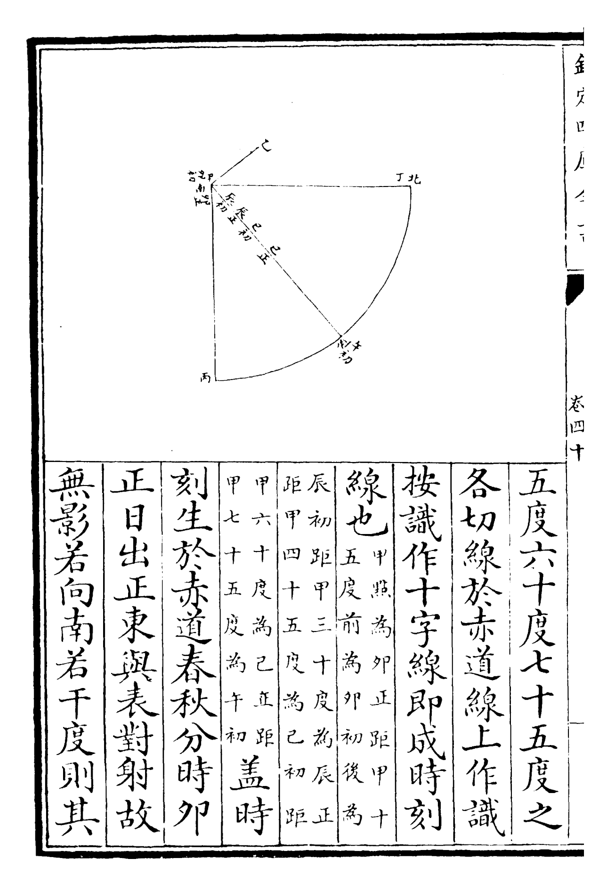
向東壁上畫立面日晷法

以北極出地四十度為準

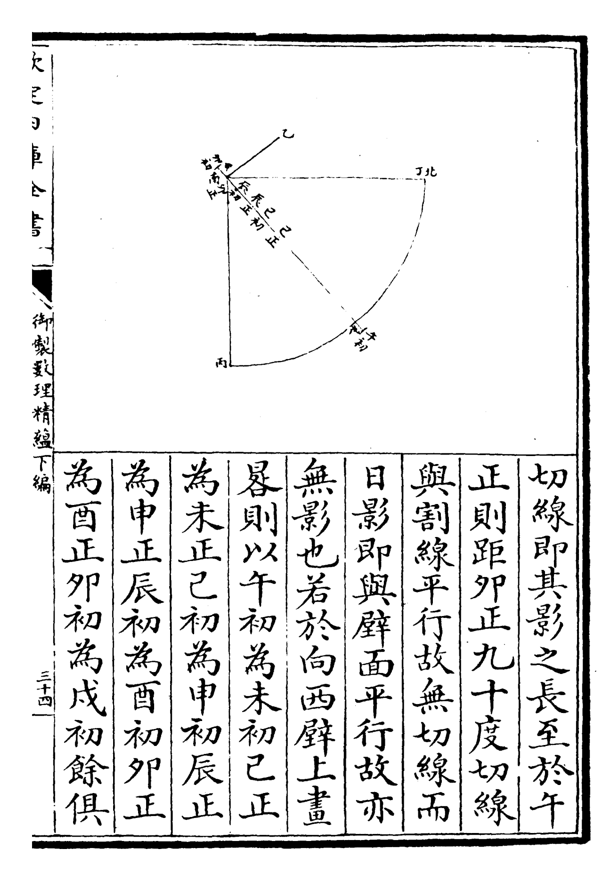
法先安甲乙直表與壁面



成直角（甲乙表不拘尺寸）次作甲丙垂線及甲丁橫線各成直角次以甲為心作甲丙丁象限弧用比例尺分圓線比得赤道高五十度之弧為丁戊自甲至戊作甲戊赤道線乃以甲乙表長為半徑用比例尺正切線比得十五度三十度四十



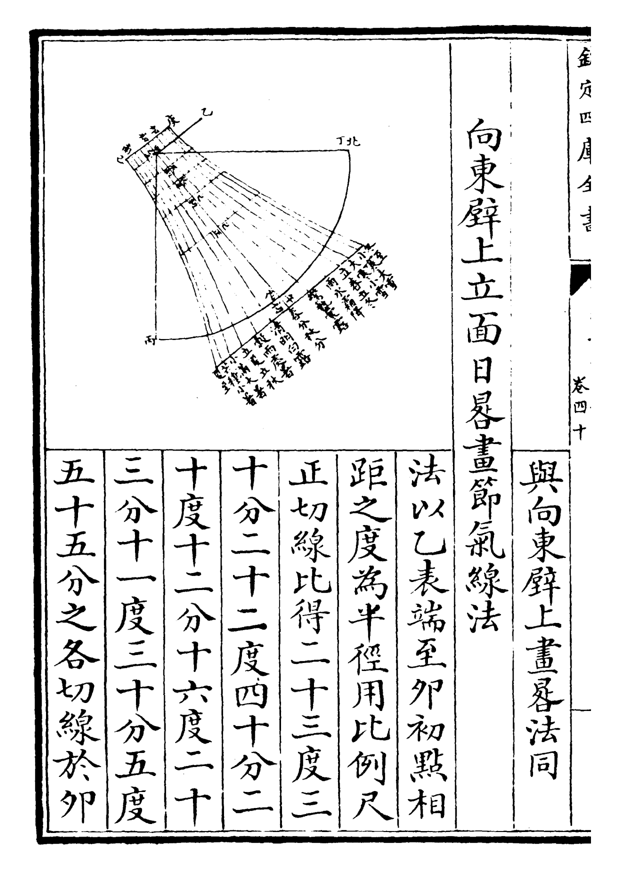
五度六十度七十五度之各切線於赤道線上作識按識作十字線即成時刻線也甲點為卯正距甲十五度前為卯初後為辰初距甲三十度為辰正距甲四十五度為巳初距甲六十度為巳正距甲七十五度為午初蓋時刻生於赤道春秋分時卯正日出正東與表對射故無影若向南若干度則其



切線即其影之長至於午正則距夘正九十度切線與割線平行故無切線而日影即與辟面平行故亦無影也若於向西辟上晝晷則以午初為未初己正為未正己初為申初辰正為申正辰初為酉初夘正為酉正夘初為戌初餘俱

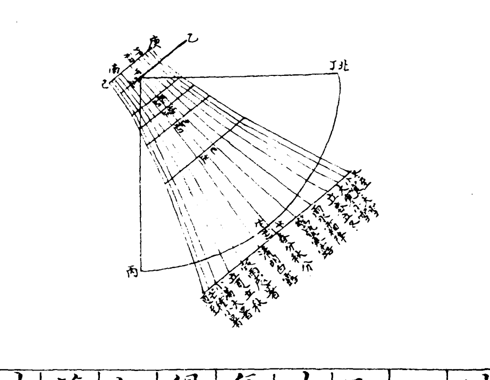
與向東辟上晝晷法同

向東辟上立面日晷晝節氣線法



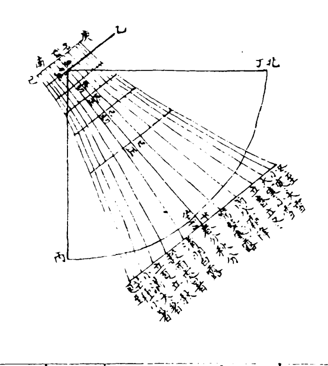
法以乙表端至夘初點相距之度為半徑用比例尺正切線比得二十三度三十分二十二度四十分二十度十二分十六度二十三分十一度三十分五度五十五分之各切線於夘

初線左右作識即得各節氣日影界春秋分為赤道冬至距赤道南夏至距赤道北各二十三度三十分小寒大雪距赤道南芒種小暑距赤道北各二十二度四十分大寒小雪距赤道南小滿大暑距赤道北各二十度十二分立春立冬距赤道南立夏立秋距赤道北各十六度二十三分雨水霜降距赤道南穀雨處暑距赤道北各十一度三十分驚蟄寒露距赤道南清明白露距赤道北各五度五十五分又以乙表



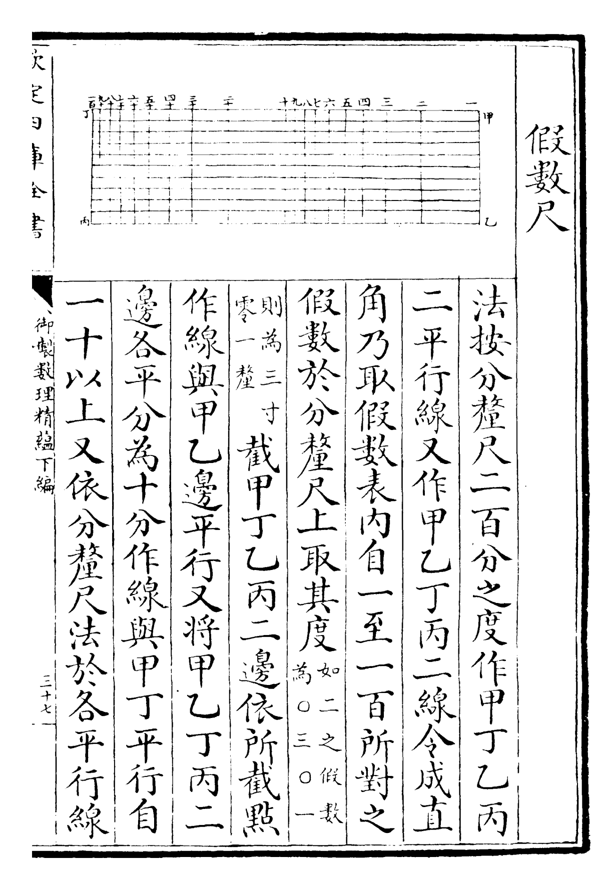
端至卯正點相距之度即甲乙表長為半徑比得各節氣距緯度之切線於卯正線左右作識即為卯正各節氣日影界凡各時刻節氣俱以乙表端至各時刻點相距之度為半徑比得各節氣距緯度之切線於各時刻線左右作識即得各

時刻各節氣之日影界將各點作線聯之即成節氣線也盖春秋分時日在赤道故其影界即在赤道線之上其自表端至各時刻點相距之度即春秋分各時刻之影線也若春分以後秋分以前日在赤道北夏至而極北則影在南春

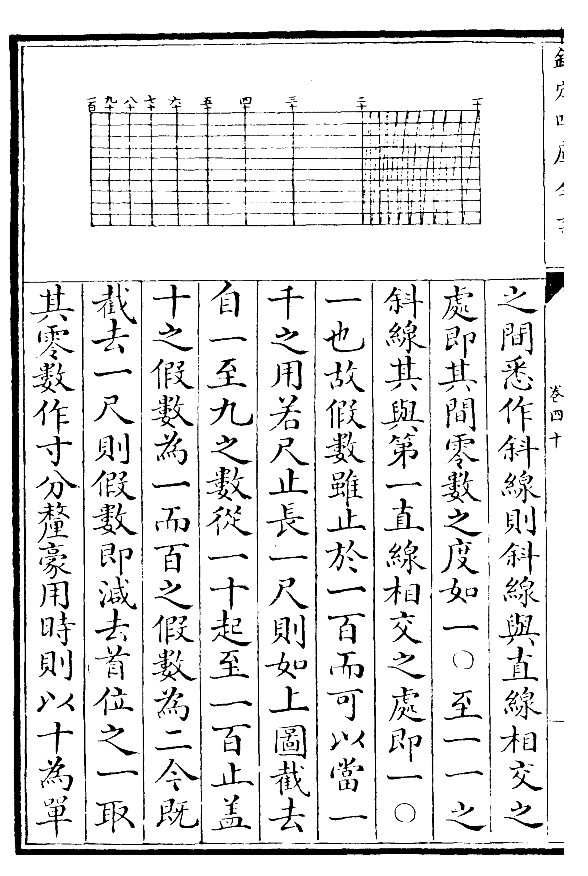


分以前秋分以後日在赤道南冬至而極南則影在北故以表端至各時刻點相距之度為半徑而取各節氣距緯度之切線即為各時刻各節氣之日影界聯之即成節氣線也向西辟法同

假數尺



法按分釐尺二百分之度作甲丁乙丙二平行線又作甲乙丁丙二線令成直角乃取假數表内自一至一百所對之假數於分釐尺上取其度（如二之假數為〇三〇一則為三寸零一釐）截甲丁乙丙二邊依所截點作線與甲乙邊平行又將甲乙丁丙二邊各平分為十分作線與甲丁平行自一十以上又依分釐尺法於各平行線



之間悉作斜線則斜線與直線相交之
處即其間零數之度如一〇至一一之
斜線其與第一直線相交之處即一〇
一也故假數雖止於一百而可以當一
千之用若尺止長一尺則如上圖截去
自一至九之數從一十起至一百止蓋
十之假數為一而百之假數為二令既
截去一尺則假數即減去首位之一取
其零數作寸分釐豪用時則以十為單

總之假數尺雖始於一十終於一百小之則可以為單為零大之則可以為千為萬皆因假數之首位雖遞加一數而其後之零數皆同故可以進退為用惟在比例分明加減詳審則其用自無窮也

設如有十二人每人給銀四兩五錢問共銀幾何

法以假數尺之四分五釐即從一十至四十五之度與一十二分相加得五十四分即五十

率	
一率	一人
二率	四兩五錢
三率	十二人
四率	五十四兩

四兩為共銀數也蓋一人與四兩五錢之比同於一十二人與五十四兩之比兩真數以乘得者假數以加得之故以四分五釐當四兩五錢以十二分當十二人兩線相加即得五十四兩為共銀數也

設如有米四百八十石每石價銀七錢五分問共價銀幾何

法以假數尺之七分五釐即自一十至七十五之度

一率　一石
二率　七錢五分
三率　四百八十石
四率　三百六十兩

與四十八分相加過於一百分之度乃以其過於一百分之餘度自假數尺十分以上量之得三十六分即三百六十兩為共價銀數也蓋以四十八分當四百八十石是以單當十則相加過於一百分即為過於一千分矣而以其過於一千分之餘度自十分以上量之是以十分當千分則三十六分即為三千六百分既以七分五釐當七錢五分故三

千六百分即為三百六十兩也

設如有銀五百一十二兩令三十二人分之問每人幾何

一率	三十二人
二率	五百一十二兩
三率	一人
四率	十六兩

法以假數尺之五十一分二釐內減去三十二分以其餘度自假數尺十分以上量之得十六分即十六兩為每人之銀數也蓋三十二人與五百一十二兩之比同於一人與十六兩之比而真數以除得者假數以減得之故以五十一

分二釐當五百一十二兩以三十二分當三十二人相減用其餘度自十分以上量之是以十分當一分故十六分即為一分六釐既以五十一分二釐當五百一十二兩則一分六釐即為十六兩也

設如有米四十二石令六十人分之問每人幾何

法以假數尺之四十二分內減去六分即自一十至六十之度不足於一十之分乃以其

一率	六十人
二率	四十二石
三率	一人
四率	七斗

不足於一十之度自假數尺一百以下減之餘七十分即七斗為每人之米數也蓋以四十二分當四十二石以六分當六十人而以相減不足於一十之分自一百以下減之是以百分當十分則所餘之七十分即為七分矣且以六分當六十人是所減之數以單當十則減餘之數即以十為單而單即為零故所餘之七分即為七釐既以四十二分當

四十二石故七釐即為七斗也

設如每銀二兩五錢兌錢四千七百五十文今有銀八兩問兌錢幾何

一率	二兩五錢
二率	四千七百五十
三率	八兩
四率	一萬五千二百

法以假數尺之二十五分與四十七分五釐相減餘度與八十分相加過於一百分乃以其過於一百分之餘度自假數尺十分以上量之得十五分二釐即一萬五千二百為共錢數也蓋二兩五錢與四千七百五十文之比同於八兩

一率　二兩五錢
二率　四千七百五十
三率　八兩
四率　一萬五千二百

與一萬五千二百文之比故以二兩五錢為一率四千七百五十為二率八兩為三率得一萬五千二百為四率本宜以二率與三率相加內減去一率而得四率今先於二率內減去一率以其餘度與三率相加而得四率其理同也又四率既過於一百分而以其過於一百分之餘度自十分上量之是以十分當百分故十五分二釐即為一百五十二

分既以四十七分半當四千七百五十則一百五十二分即為一萬五千二百也

設如有銀六兩買米五石今有銀四兩八錢問買米幾何

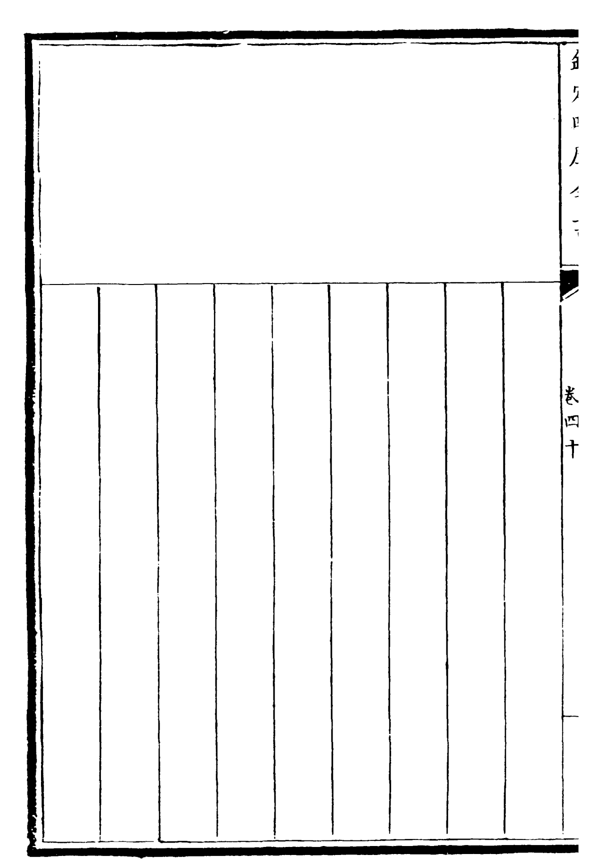
一率　六兩
二率　五石
三率　四兩八錢
四率　四石

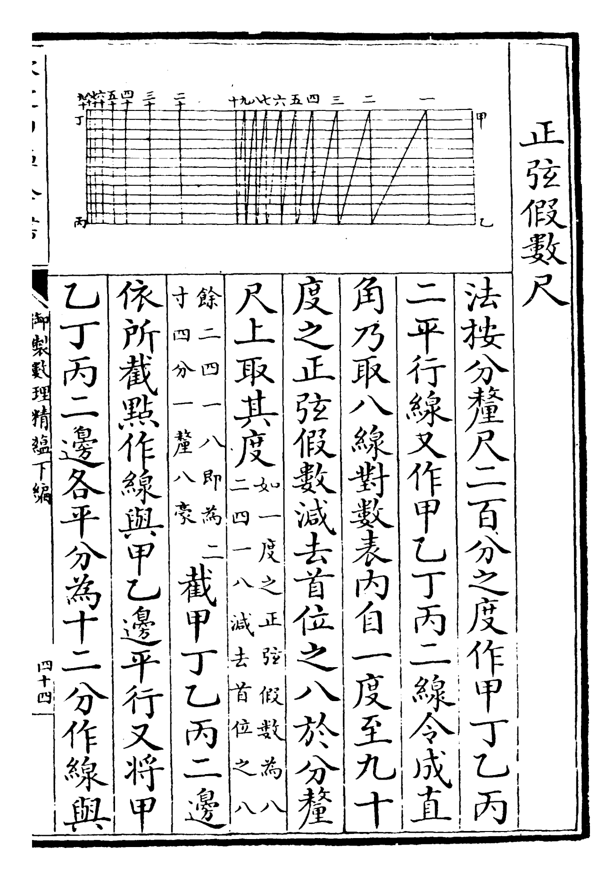
法以假數尺之六十分内減去五十分餘度與四十八分相減得四十分即四石為米數也蓋六兩與五石之比同於四兩八錢與四石之比故以六兩為一

一率　六兩
二率　五石
三率　四兩八錢
四率　四石

率五石為二率四兩八錢為三率得四石為四率本宜以二率與三率相加內減去一率而得四率今先於一率內減去二率以其餘度與三率相減而得四率其理同也總之二率大於一率者則四率亦大於三率故以二率多於一率之分與三率相加而得四率若二率小於一率者則四率亦小於三率故以二率小於一率之分與三率相減而得四

率用雖不同而理實一也

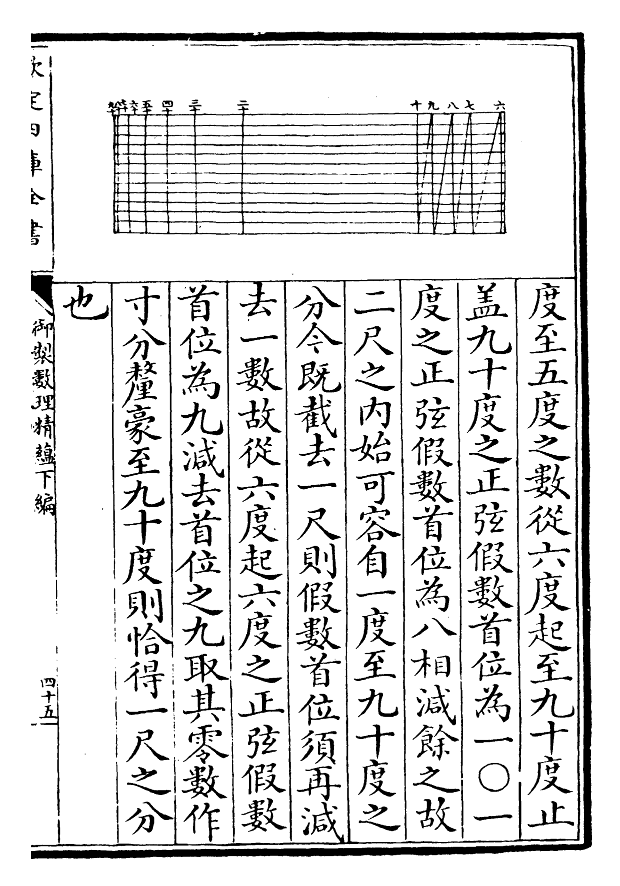




正弦假數尺

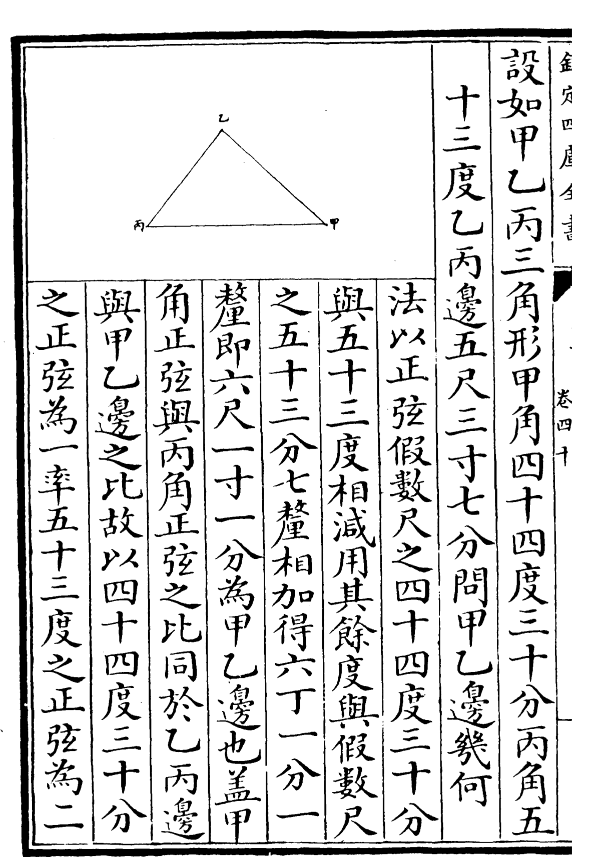
法按分釐尺二百分之度作甲丁乙丙二平行線又作甲乙丁丙二線令成直角乃取八線對數表內自一度至九十度之正弦假數減去首位之八於分釐尺上取其度（如一度之正弦假數為八二四一八減去首位之八餘二四一八即為二寸四分一釐八毫）截甲丁乙丙二邊依所截點作線與甲乙邊平行又將甲乙丁丙二邊各平分為十二分作線與

甲丁平行又依分釐尺法於各平行線之間悉作斜線則斜線與直線相交之處即其間之分數如自一度至二度之斜線其與第一直線相交之處即一度五分其與第二直線相交之處即一度十分蓋一度有六十分故直線分為十二每一直線當五分若於直線之間酌量取之則五分中之零分亦可得其大槩矣若尺小止用一百分則截去自一



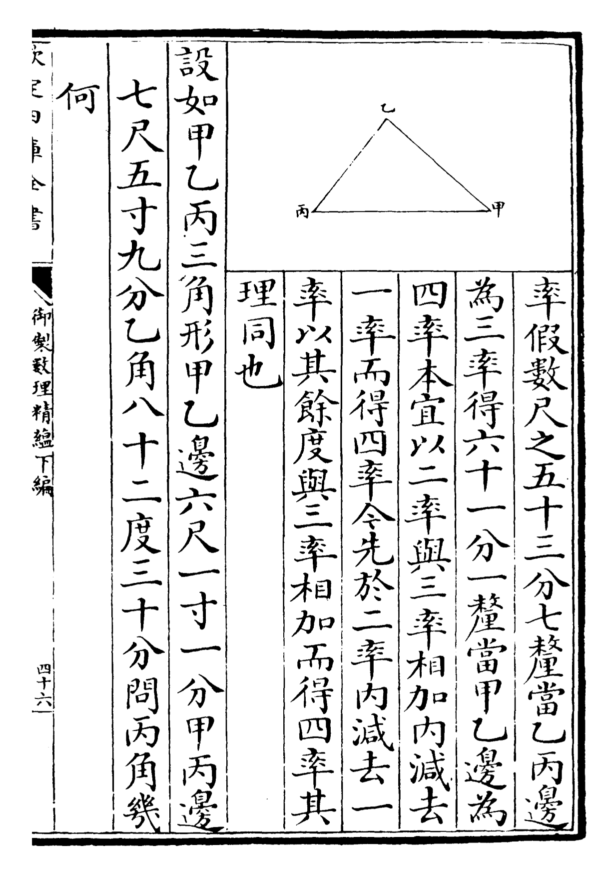
度至五度之數從六度起至九十度止蓋九十度之正弦假數首位為一〇一度之正弦假數首位為八相減餘之故二尺之内始可容自一度至九十度之分令既截去一尺則假數首位須再減去一數故從六度起六度之正弦假數首位為九減去首位之九取其零數作寸分釐豪至九十度則恰得一尺之分也

設如甲乙丙三角形甲角四十四度三十分丙角五十三度乙丙邊五尺三寸七分問甲乙邊幾何

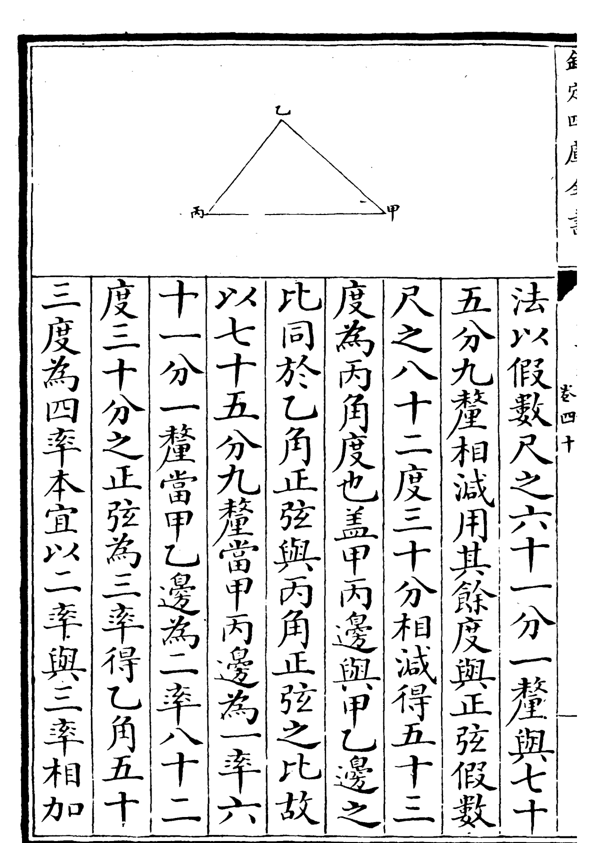


法以正弦假數尺之四十四度三十分與五十三度相減用其餘度與假數尺之五十三分七釐相加得六丁一分一釐即六尺一寸一分為甲乙邊也蓋甲角正弦與丙角正弦之比同於乙丙邊與甲乙邊之比故以四十四度三十分之正弦為一率五十三度之正弦為二

率假數尺之五十三分七釐當乙丙邊為三率得六十一分一釐當甲乙邊為四率本宜以二率與三率相加內減去一率而得四率令先於二率內減去一率以其餘度與三率相加而得四率其理同也

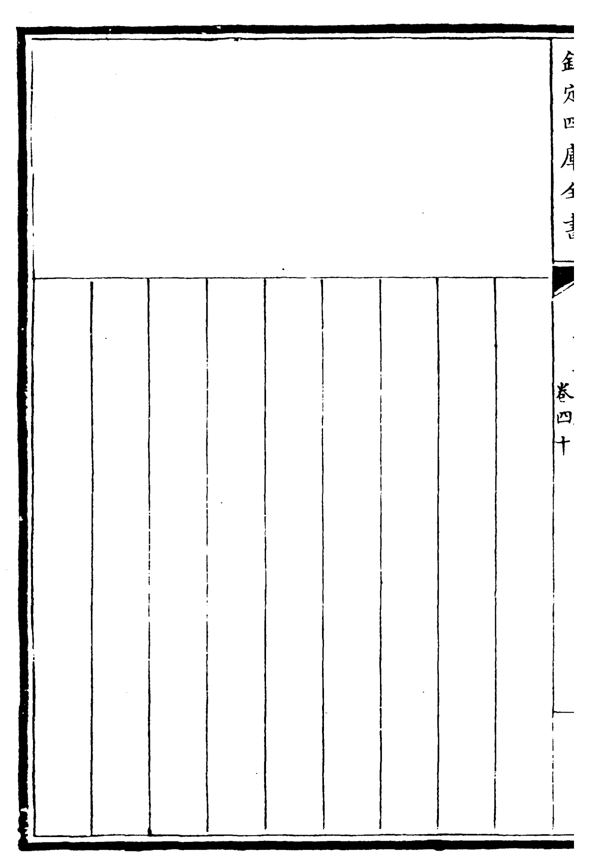


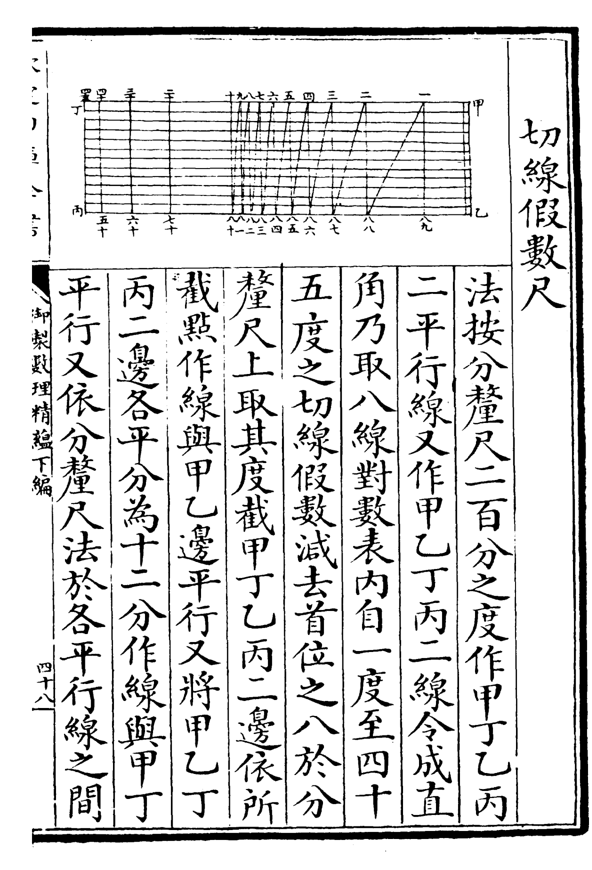
設如甲乙丙三角形甲乙邊六尺一寸一分甲丙邊七尺五寸九分乙角八十二度三十分問丙角幾何



法以假數尺之六十一分一釐與七十五分九釐相減用其餘度與正弦假數尺之八十二度三十分相減得五十三度為丙角度也葢甲丙邊與甲乙邊之比同於乙角正弦與丙角正弦之比故以七十五分九釐當甲丙邊為一率六十一分一釐當甲乙邊為二率八十二度三十分之正弦為三率得乙角五十三度為四率本宜以二率與三率相加

內減去一率而得四率今先於一率內減去二率餘度與三率相減而得四率其理同也





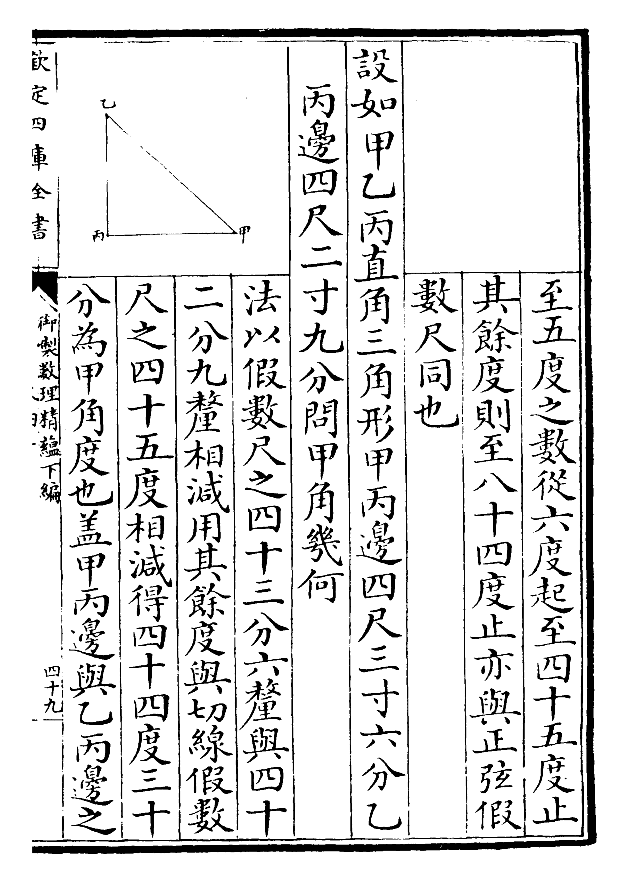
切線假數尺

法按分釐尺二百分之度作甲丁乙丙二平行線又作甲乙丁丙二線令成直角乃取八線對數表内自一度至四十五度之切線假數減去首位之八於分釐尺上取其度截甲丁乙丙二邊依所截點作線與甲乙邊平行又將甲乙丁丙二邊各平分為十二分作線與甲丁平行又依分釐尺法於各平行線之間

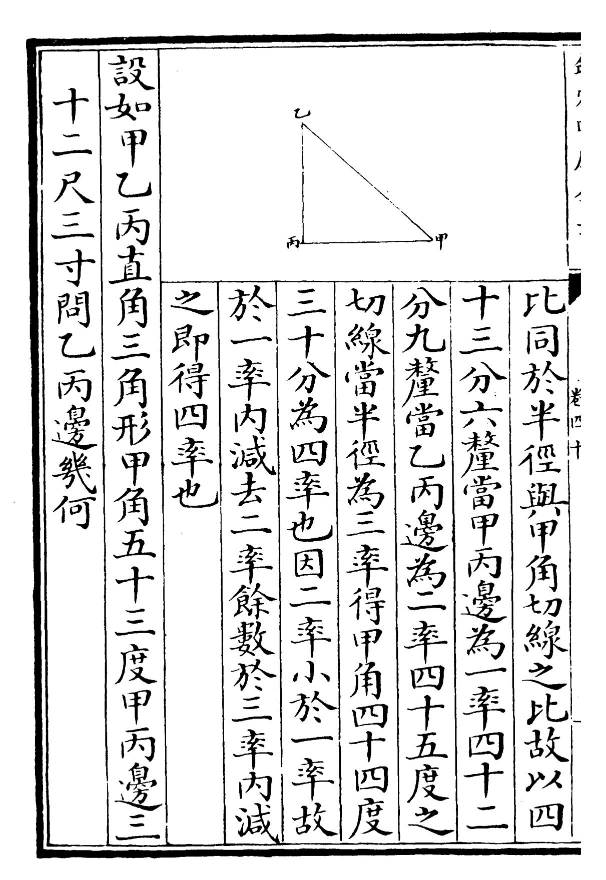
悉作斜線則斜線與直線相交之處即其間之分數皆與正弦假數尺同至於四十五度以後則與四十五度以前相為正餘蓋四十五度之正切線與半徑等四十五度以前之正切線即四十五度以後之餘切線兩半徑與正切之比同於餘切與半徑之比故切線尺止用四十五度正餘相對即足八十九度之用若尺小止用一百分則截去自一度

至五度之數從六度起至四十五度止其餘度則至八十四度止亦與正弦假數尺同也

設如甲乙丙直角三角形甲丙邊四尺三寸六分乙丙邊四尺二寸九分問甲角幾何



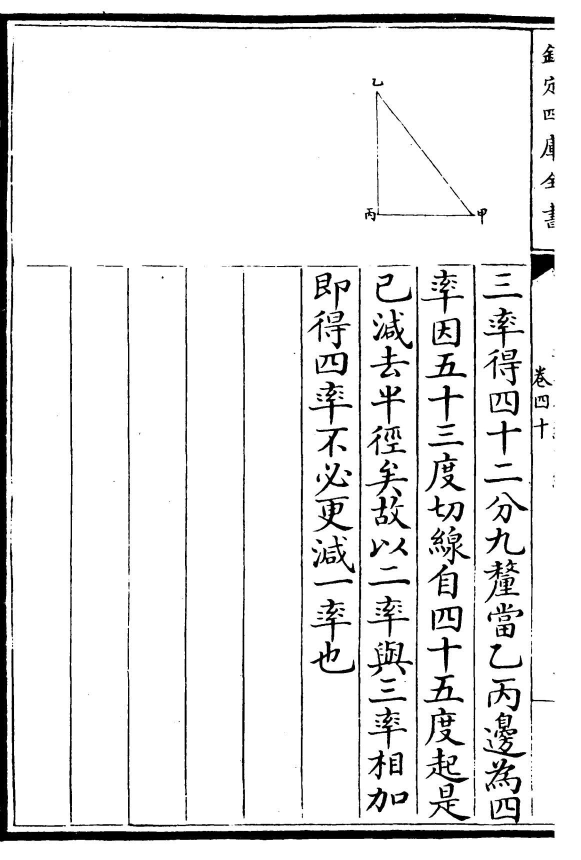
法以假數尺之四十三分六釐與四十二分九釐相減用其餘度與切線假數尺之四十五度相減得四十四度三十分為甲角度也蓋甲丙邊與乙丙邊之



比同於半徑與甲角切線之比故以四十三分六釐當甲丙邊為一率四十二分九釐當乙丙邊為二率四十五度之切線當半徑為三率得甲角四十四度三十分為四率也因二率小於一率故於一率內減去二率餘數於三率內減之即得四率也

設如甲乙丙直角三角形甲角五十三度甲丙邊三十二尺三寸問乙丙邊幾何

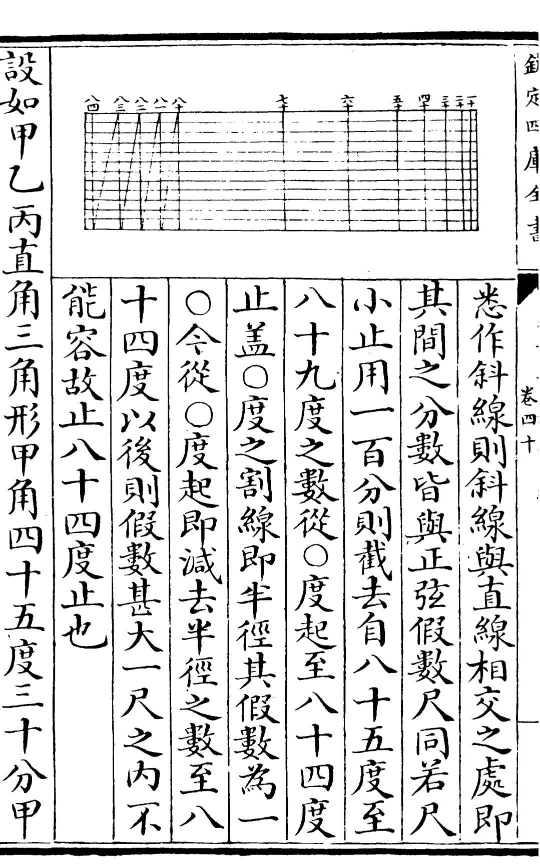
法以切線假數尺之五十三度與半徑相減用其餘度與假數尺之三十二分三釐相加得四十二分九釐即四十二尺九寸為乙丙邊也葢半徑與甲角正切線之比同於甲丙邊與乙丙邊之比而甲角餘切線與半徑之比亦同於甲丙邊與乙丙邊之比故以五十三度之餘切線為一率四十五度之切線當半徑為二率三十二分三釐當甲丙邊為



三率得四十二分九釐當乙丙邊爲四率因五十三度切線自四十五度起是已減去半徑矣故以二率與三率相加即得四率不必更減一率也

割線假數尺

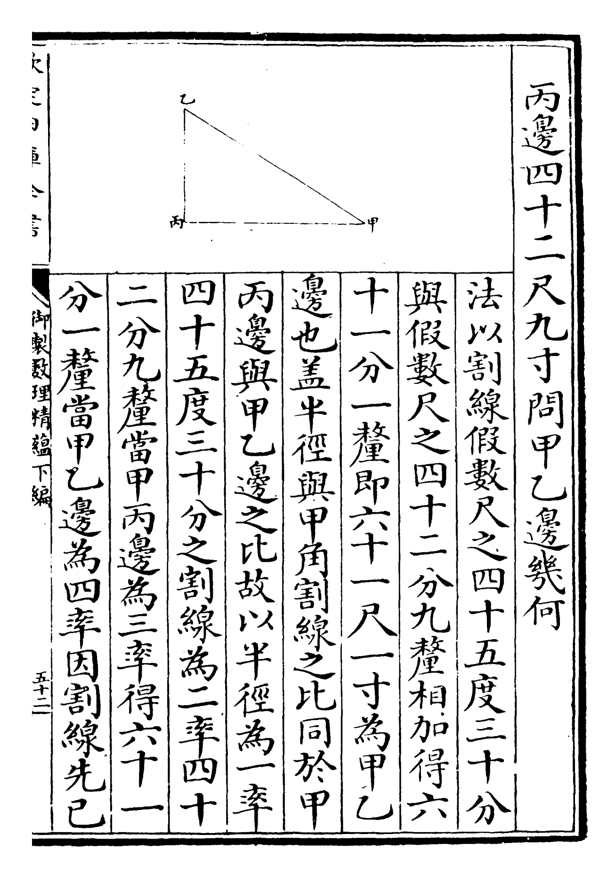
法按分釐尺二百分之度作甲丁乙丙二平行線又作甲乙丁丙二線令成直角乃取八線對數表內自一度至八十九度之割線假數減去首位之一於分釐尺上取其度截甲丁乙丙二邊依所截點作線與甲乙邊平行又將甲乙丁丙二邊各平分為十二分作線與甲丁平行又依分釐尺法於各平行線之間



卷作斜線則斜線與直線相交之處即其間之分數皆與正弦假數尺同若尺小止用一百分則截去自八十五度至八十九度之數從〇度起至八十四度止蓋〇度之割線即半徑其假數為一〇令從〇度起即減去半徑之數至八十四度以後則假數甚大一尺之内不能容故止八十四度止也

設如甲乙丙直角三角形甲角四十五度三十分甲

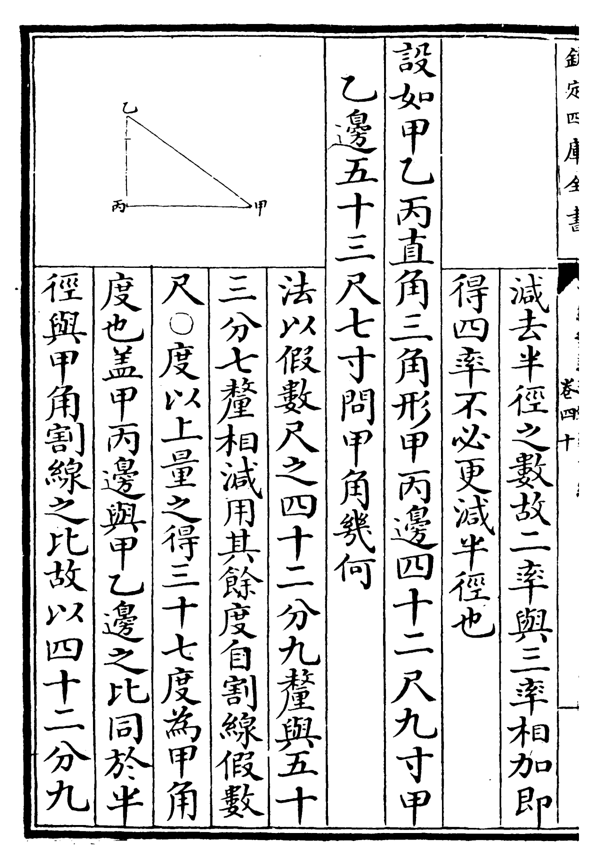
丙邊四十二尺九寸問甲乙邊幾何



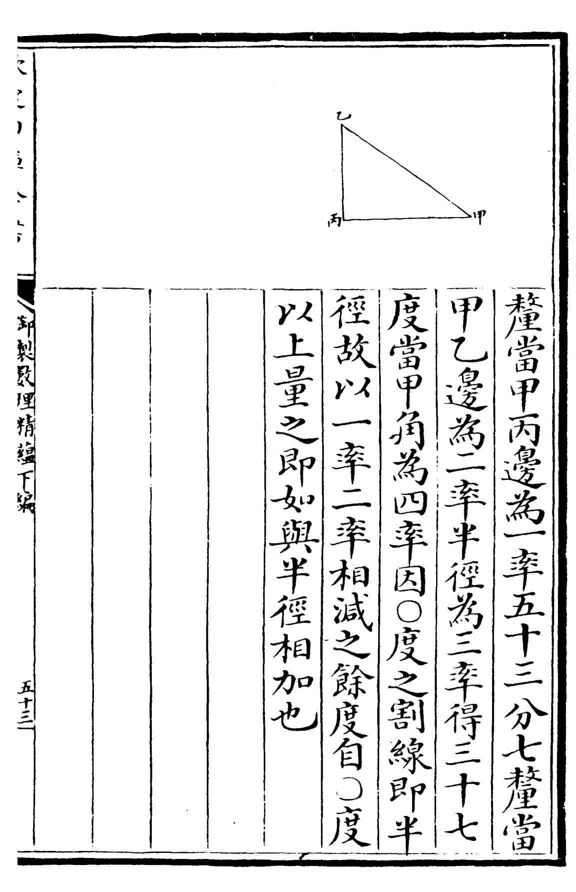
法以割線假數尺之四十五度三十分與假數尺之四十二分九釐相加得六十一分一釐即六十一尺一寸為甲乙邊也葢半徑與甲角割線之比同於甲丙邊與甲乙邊之比故以半徑為一率四十五度三十分之割線為二率四十二分九釐當甲丙邊為三率得六十一分一釐當甲乙邊為四率因割線先已

減去半徑之數故二率與三率相加即得四率不必更減半徑也

設如甲乙丙直角三角形甲丙邊四十二尺九寸甲乙邊五十三尺七寸問甲角幾何



法以假數尺之四十二分九釐與五十三分七釐相減用其餘度自割線假數尺〇度以上量之得三十七度為甲角度也蓋甲丙邊與甲乙邊之比同於半徑與甲角割線之比故以四十二分九



釐當甲丙邊為一率五十三分七釐當甲乙邊為二率半徑為三率得三十七度當甲角為四率因〇度之割線即半徑故以一率二率相減之餘度自〇度以上量之即如與半徑相加也

御製數理精藴下編卷四十

御製數理精藴下編 卷四十



總校官庶吉士臣張能照

校對官中官正臣郭長發

謄録監生臣楊金

繪圖監生臣李鈞